Control II -2024

Especificaciones de Diseño en el Dominio del Tiempo y de la Frecuencia

Fernando di Sciascio

Polos de un sistema de segundo orden subamortiguado

La forma estándar del sistema de segundo orden es:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

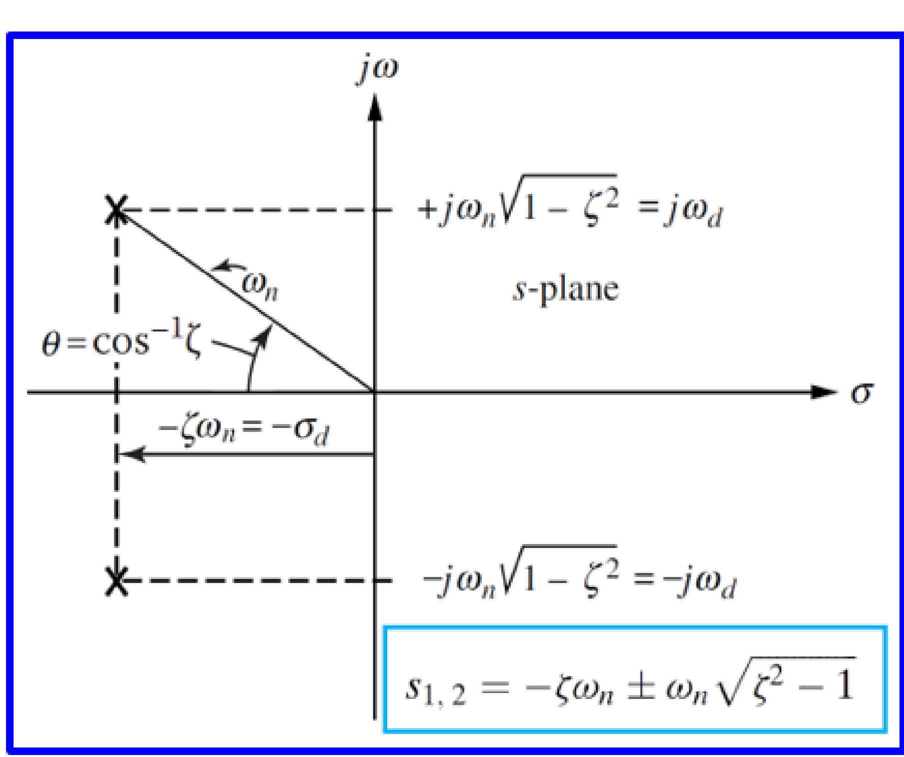
Los polos están en: $(s + \sigma - j\omega_d)(s + \sigma + j\omega_d) = (s + \sigma)^2 + \omega_d^2$

Con:

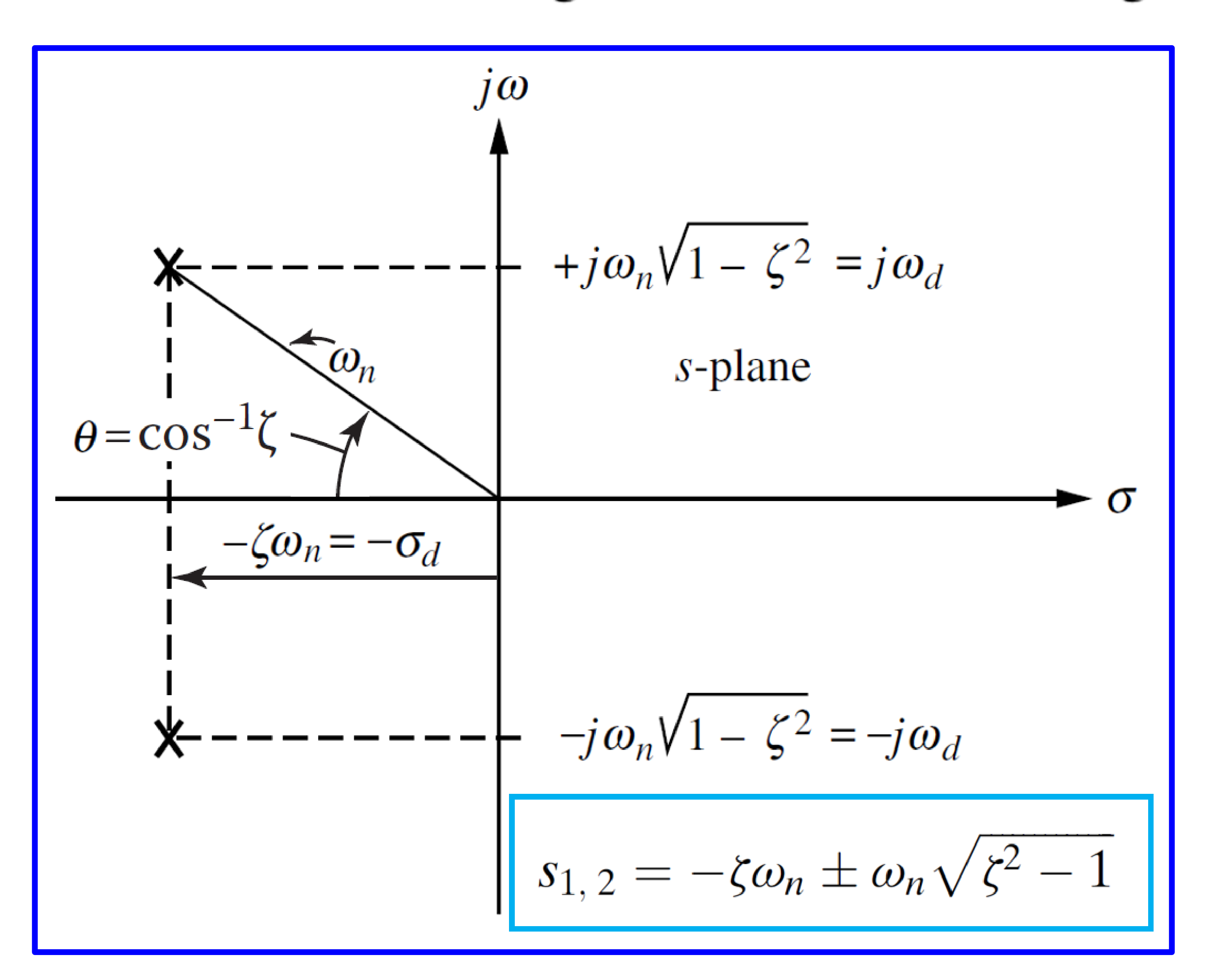
$$\sigma = \xi\,\omega_n, \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

Donde (ver figura a la derecha):

σ = atenuación
ζ = factor de amortiguamiento relativo
ω_n = frecuencia natural no amortiguada
ω_d = frecuencia natural amortiguada

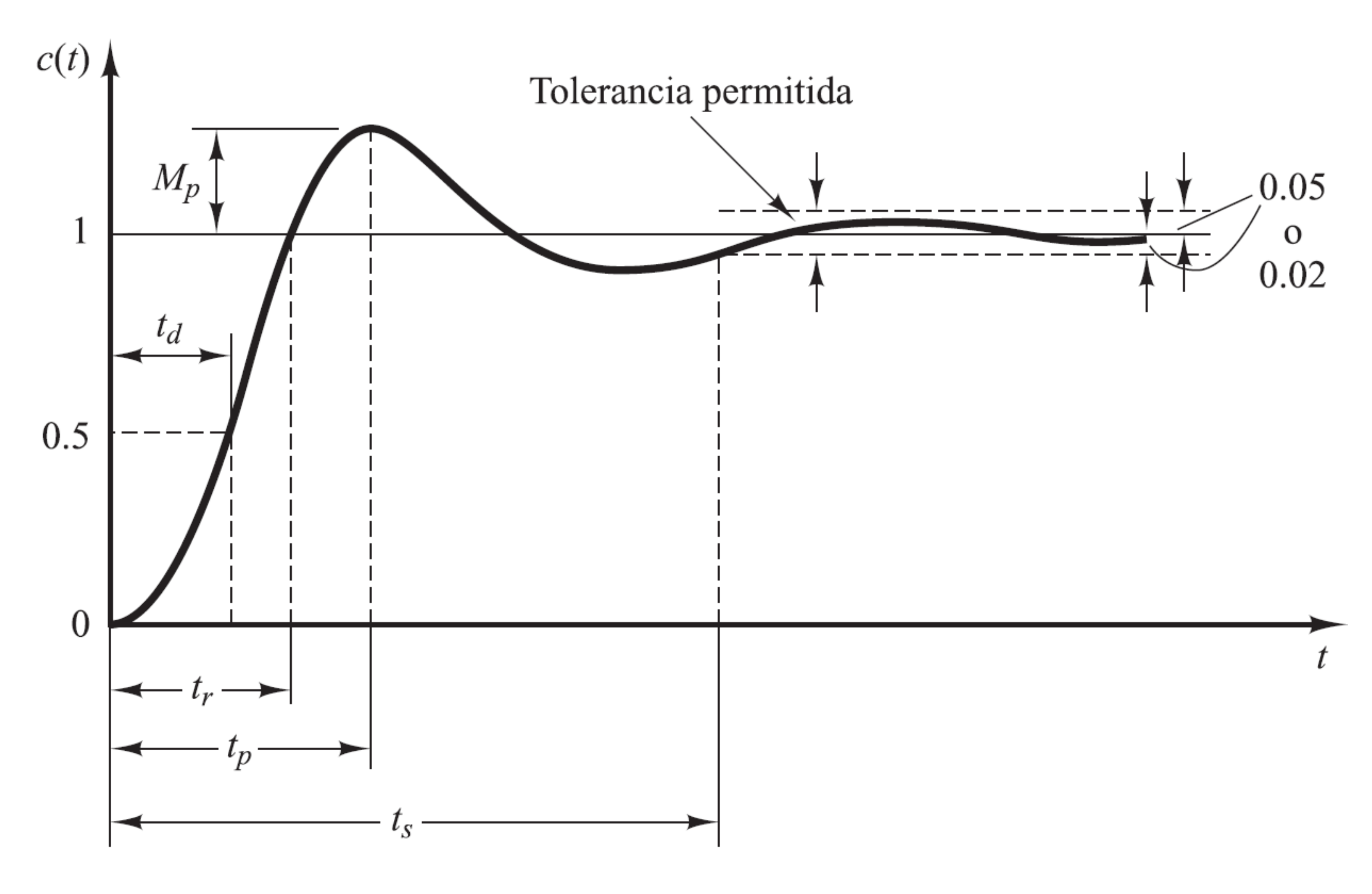


Polos de un sistema de segundo orden subamortiguado



Especificaciones temporales

1. Tiempo de Subida, t_r (T_r) (0.1 a 0.9 del valor final).
2. Tiempo de pico, t_p (T_P) (tiempo para alcanzar el máximo).
3. Porcentaje de sobreelongación, Mp(%) (%OS).
4. Tiempo de Establecimiento, t_s (Ts) (t hasta 2% del valor estacionario)

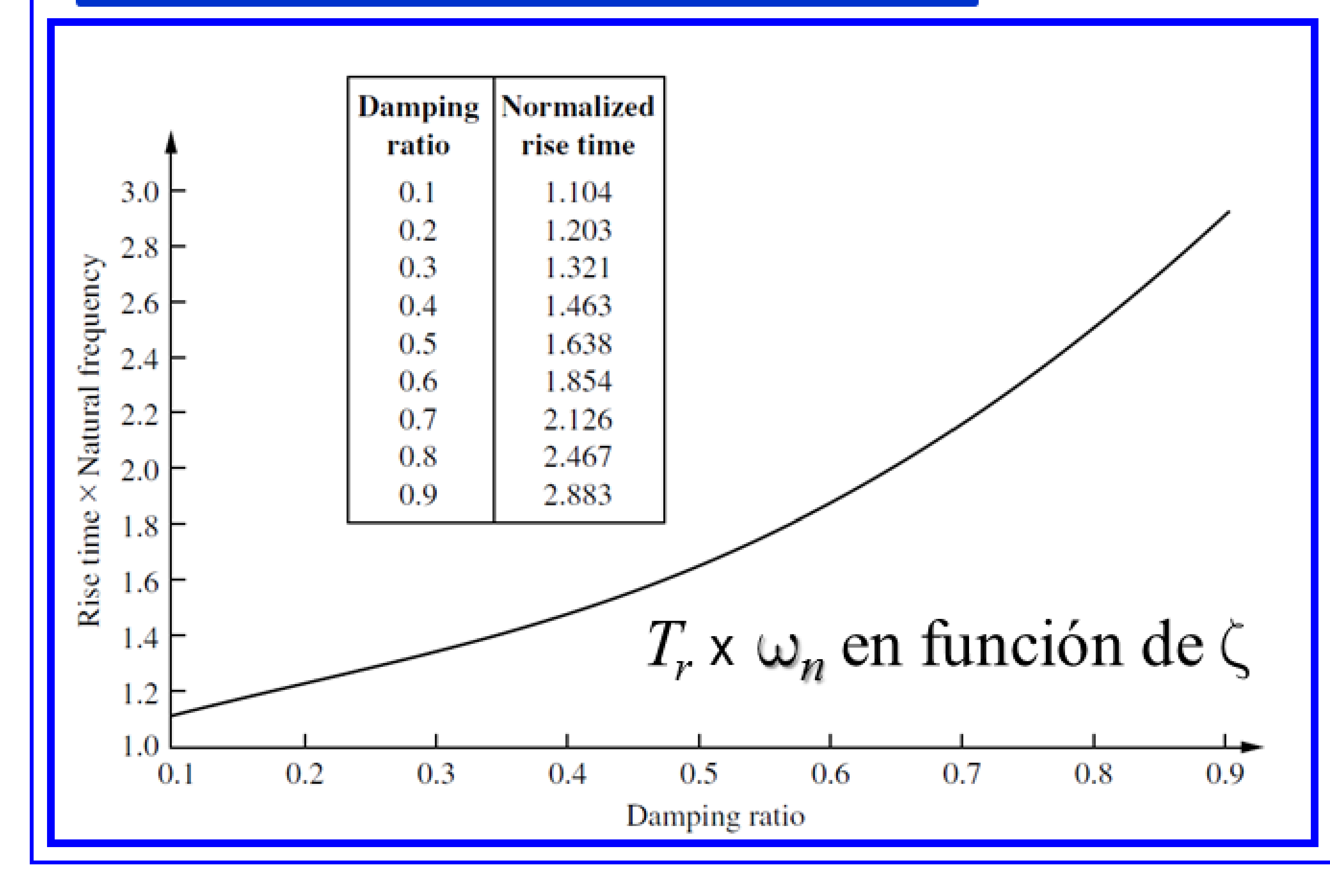


Especificaciones temporales para Sistemas de Segundo Orden

Relación entre las especificaciones temporales *Tp*, *Ts*, *Tr*, *%Os* con respecto a ζ y ω_n

$$T_r \approx \frac{1.76\zeta^3 - 0.42\zeta^2 + 1.04\zeta + 1}{\omega_n}$$

$$\%OS = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100$$



Damping ratio	Normalized rise time
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_s = \begin{cases} \dfrac{4}{\zeta\omega_n} & (2\%) \\ \dfrac{3}{\zeta\omega_n} & (5\%) \end{cases}$$

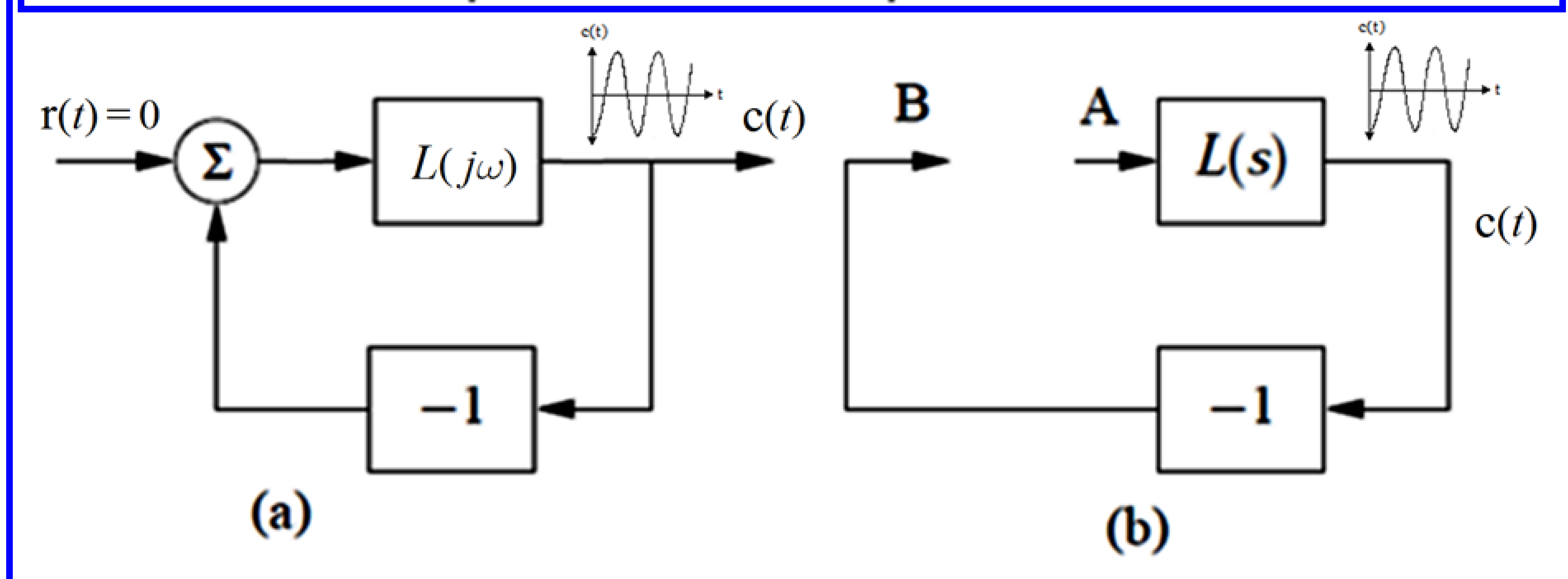
ESTABILIDAD RELATIVA

Márgenes de Ganancia y Fase

Margen de estabilidad

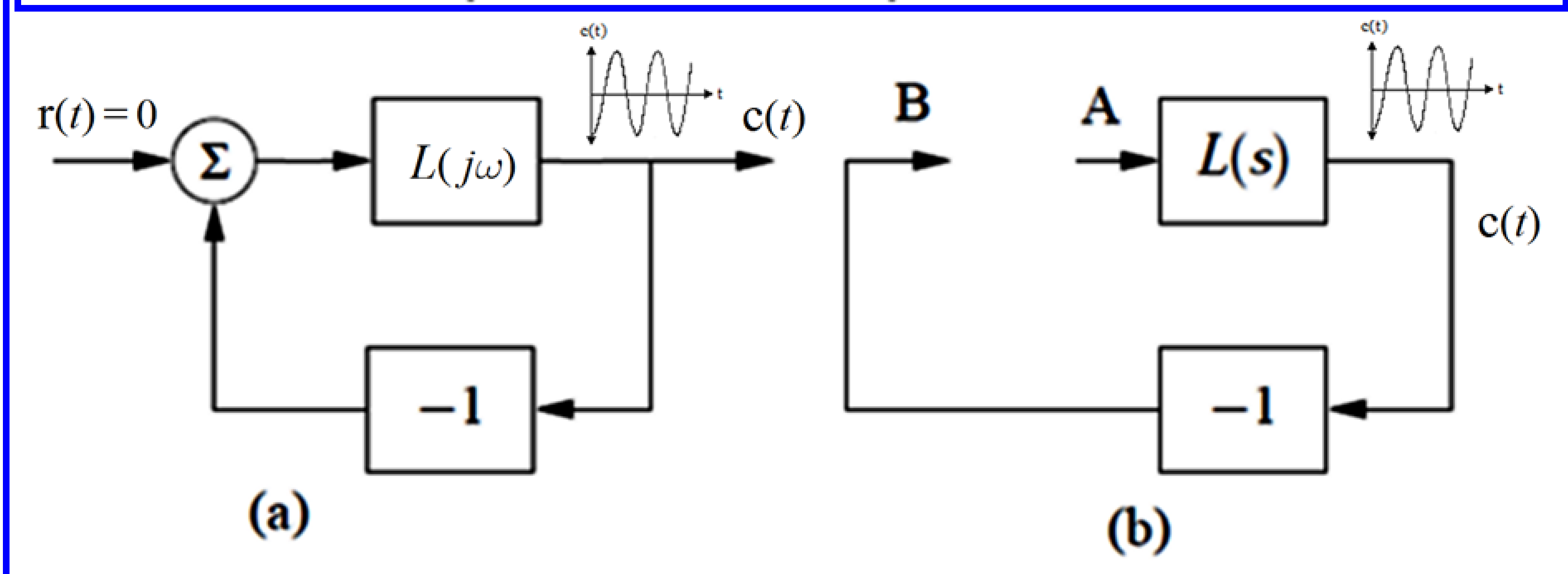
Pico de Sensibilidad

Condición para oscilación periódica en el lazo



¿Qué condiciones se deben verificar para que exista una oscilación sostenida a una frecuencia ω_c en el lazo de la figura (a)?

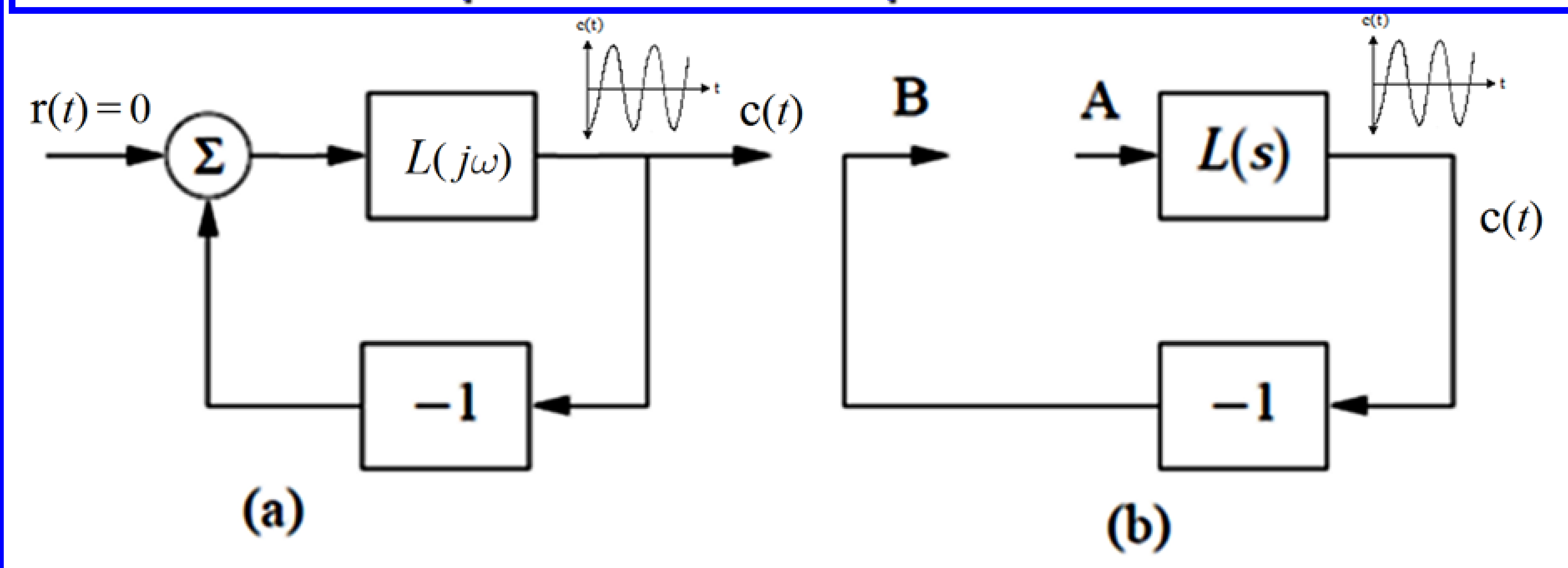
Condición para oscilación periódica en el lazo



¿Qué condiciones se deben verificar para que exista una oscilación sostenida a una frecuencia ω_c en el lazo de la figura (a)?

Las señales en los puntos A y B de la figura (b) deben ser idénticas para que se sostenga la oscilación a una frecuencia ω_c.

Condición para oscilación periódica en el lazo



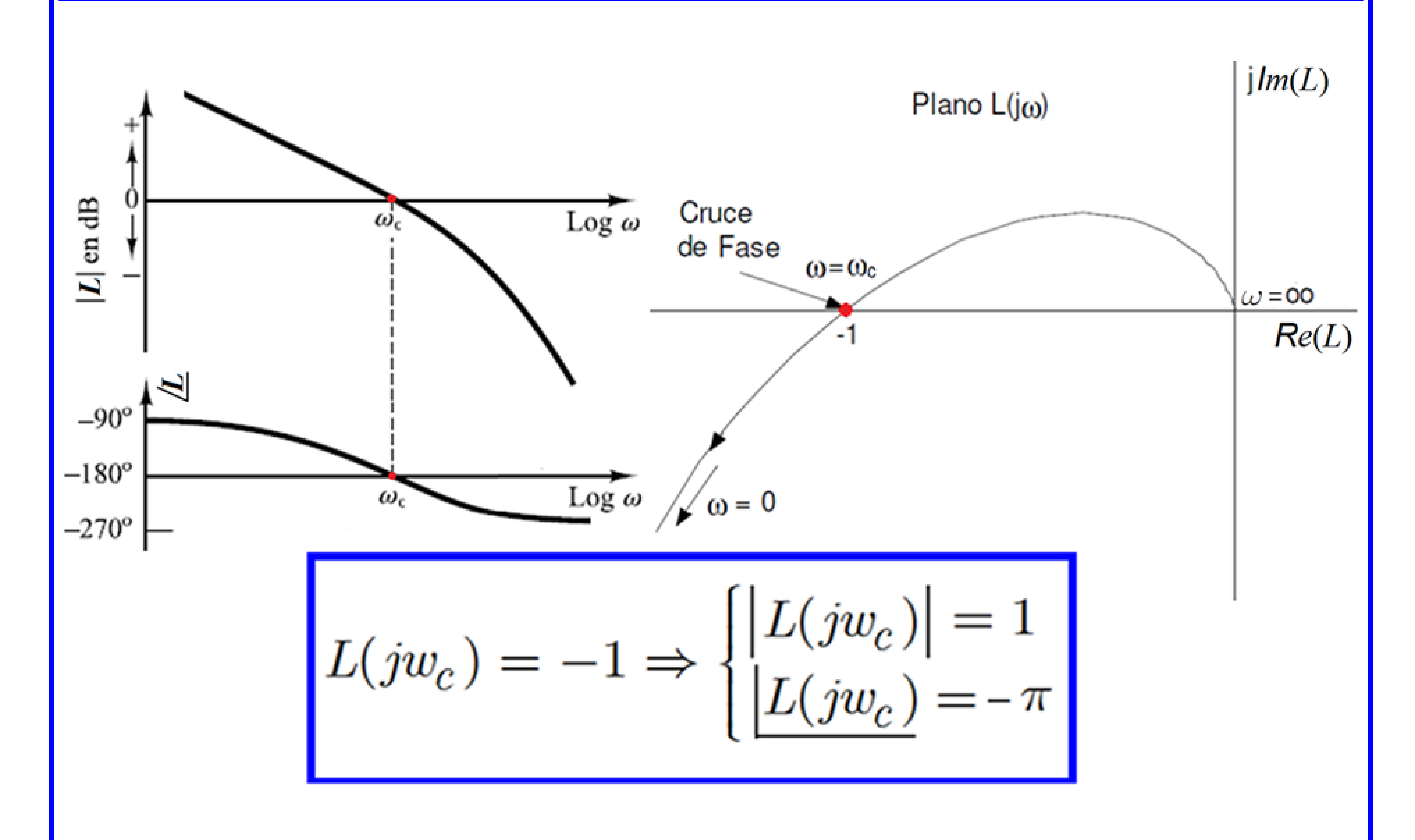
$$\begin{cases} c(t) = L(jw_c)v_A(jw_c) \\ v_B(jw_c) = -c(jw_c) \end{cases} \Rightarrow \; v_B(jw_c) = -L(jw_c)v_A(jw_c)$$

$$v_A(jw_c) = v_B(jw_c) \Rightarrow v_A(jw_c) = -L(jw_c)v_A(jw_c) \Rightarrow$$

$$L(jw_c) = -1 \Rightarrow \begin{cases} |L(jw_c)| = 1 \\ \underline{/L(jw_c)} = -\pi \end{cases}$$

Este resultado ya lo conocemos por Nyquist y Bode, el modulo de $L(j\omega_c)$ es igual a 1 y la fase a -180º, ω_c es la frecuencia de cruce por 0dB.

Condición para oscilación periódica en el lazo



$$L(jw_c) = -1 \Rightarrow \begin{cases} |L(jw_c)| = 1 \\ \angle L(jw_c) = -\pi \end{cases}$$

Margen de Ganancia y Margen de Fase

En el diseño de sistemas de control no solo es importante que el sistema resultante sea estable sino que *es necesario conocer el grado de estabilidad o cuán lejos se encuentra de la inestabilidad.*

Se debe cuantificar la estabilidad relativa introduciendo medidas de la distancia desde la respuesta en frecuencia de $L(j\omega)$ (a lazo abierto) hasta el punto de estabilidad crítica $(-1; 0)$.

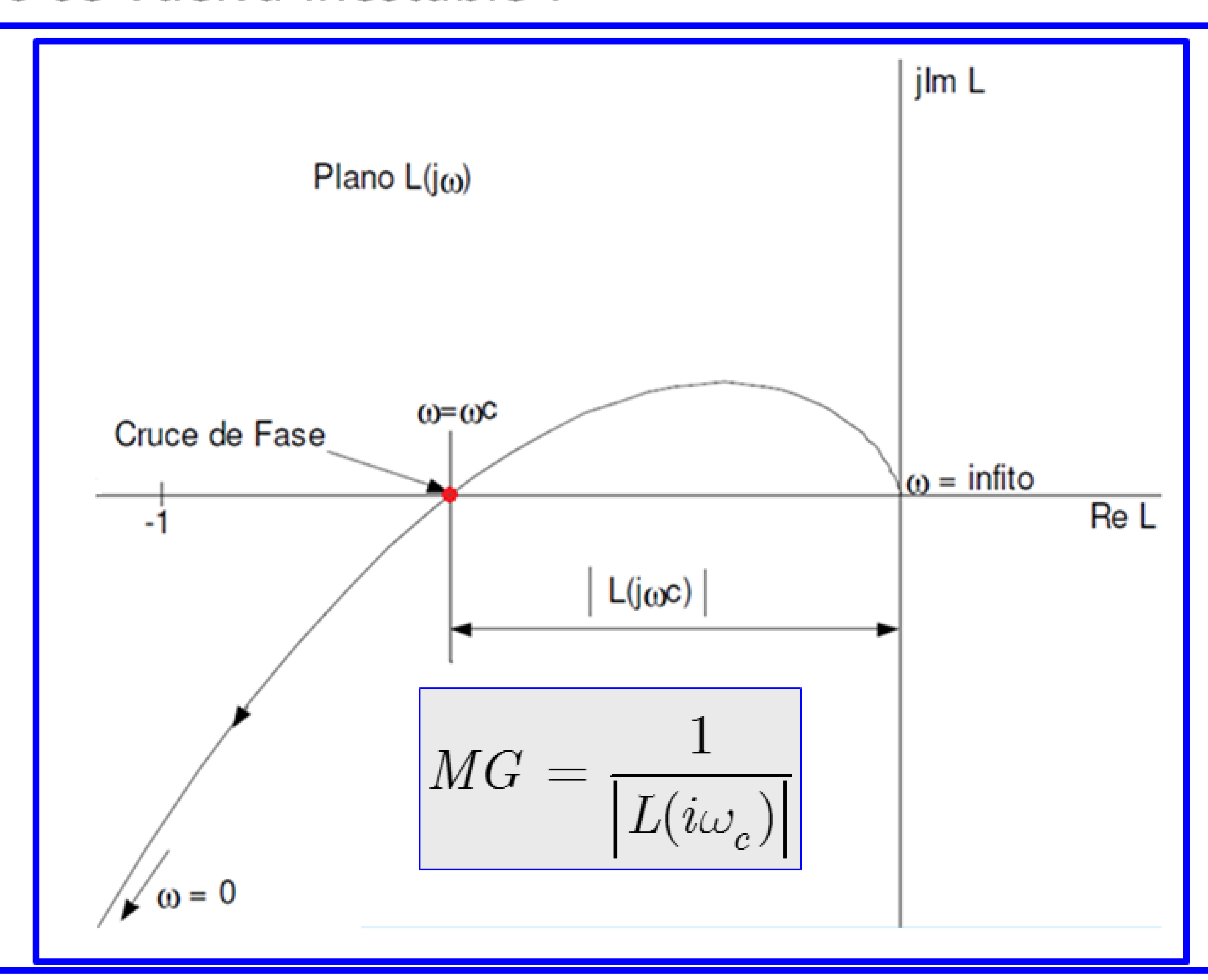
Margen de Ganancia y Margen de Fase

Los indicadores clásicos de la estabilidad relativa son el márgen de ganancia Mg y el márgen de fase Mf (ϕ_L).

El margen de ganancia Mg es la cantidad de ganancia que se puede añadir al lazo del sistema $L(j\omega)$ antes de que el mismo se vuelva inestable.

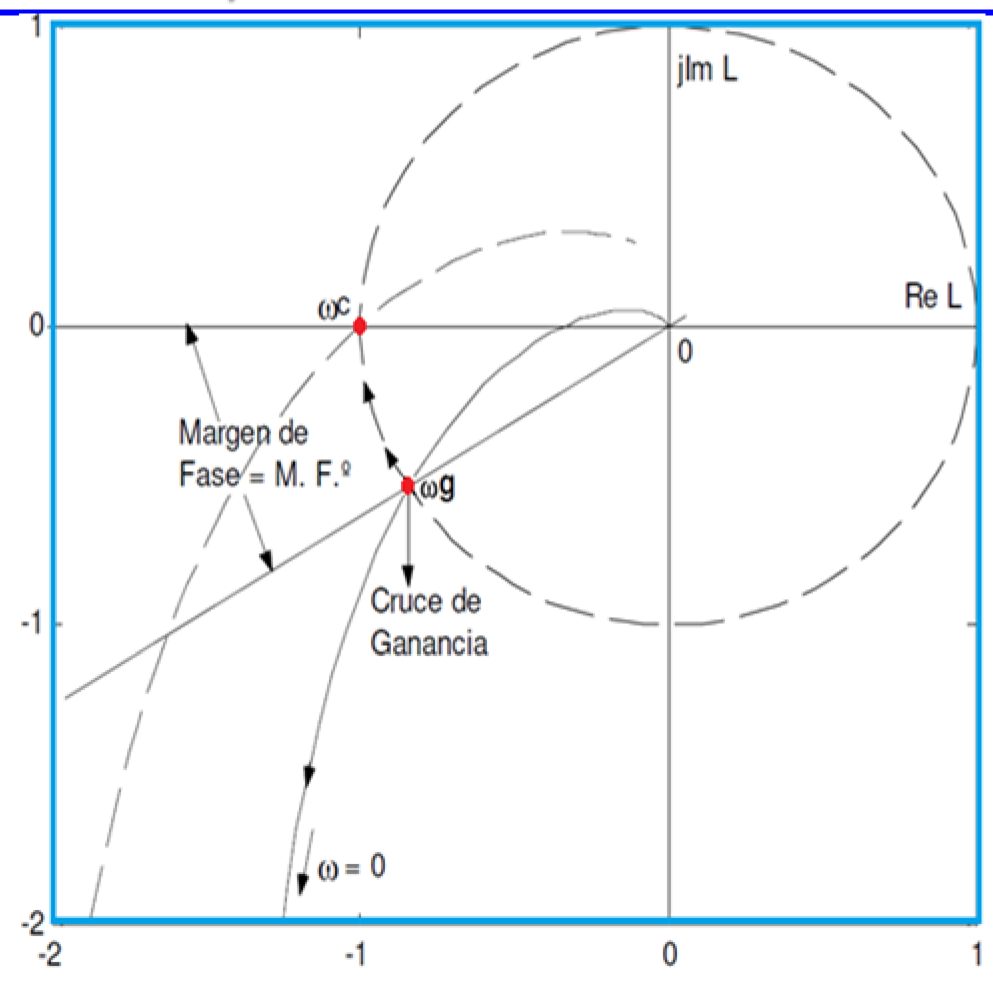
El margen de fase Mf es el mínimo ángulo en grados que la traza $L(j\omega)$ se debe rotar alrededor del origen, para que el cruce de ganancia pase por el punto critico (-1, j0). Es equivalente a: *La cantidad de retardo puro que se puede añadir al lazo, antes de que el mismo se vuelva inestable.*

Margen de ganancia: "Es la cantidad de ganancia que se puede añadir al lazo del sistema $L(j\omega)$ antes de que el mismo se vuelva inestable".



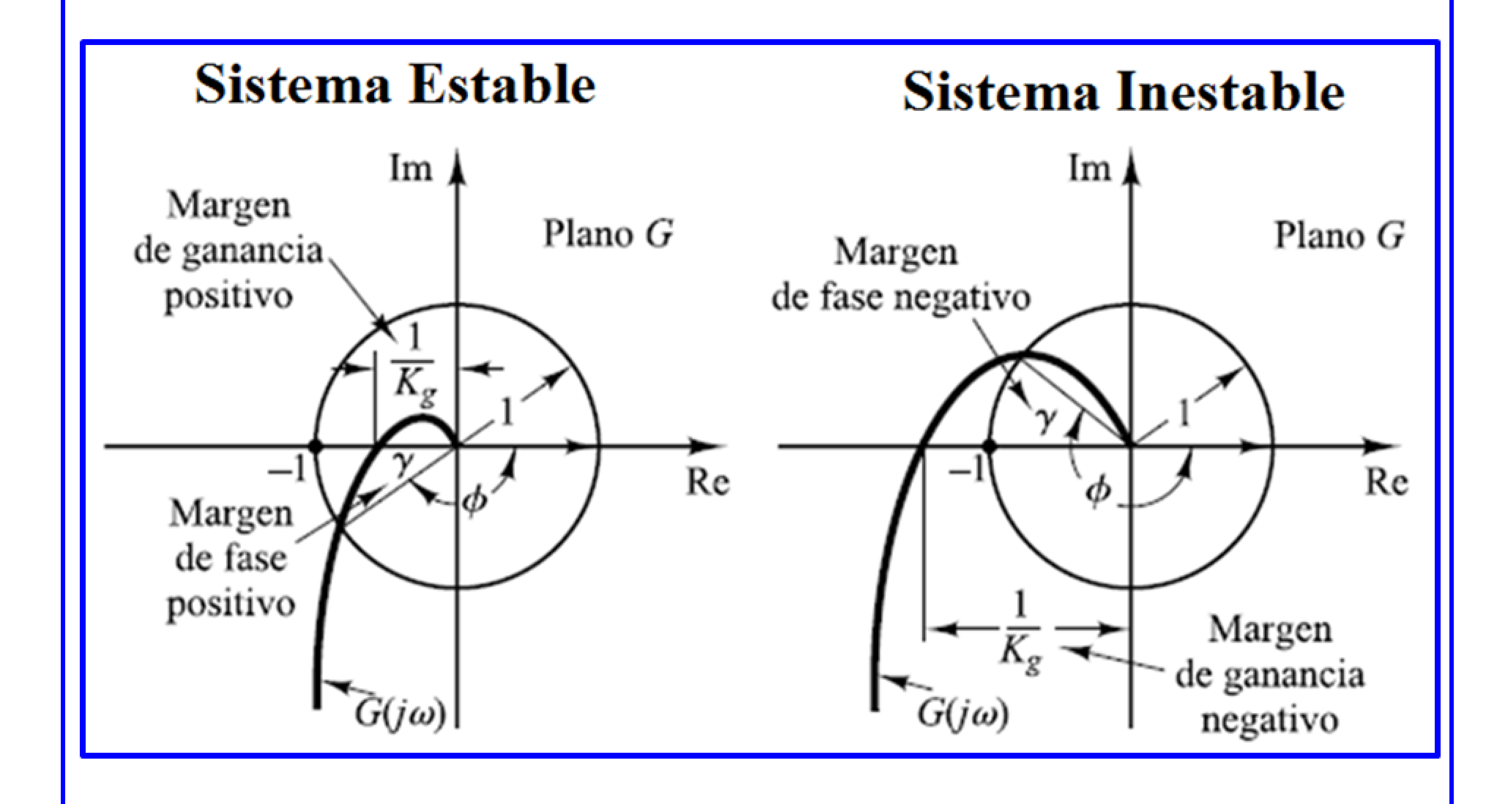
Margen de fase: "Es el mínimo ángulo en grados que la traza $L(j\omega)$ se debe rotar alrededor del origen, para que el cruce de ganancia pase por el punto critico (-1, j0)".

Es la cantidad de retardo puro que se puede añadir al lazo, antes de que el mismo se vuelva inestable.



$$MF = \pi + \angle L(i\omega g)$$

Margen de Ganancia y Margen de Fase



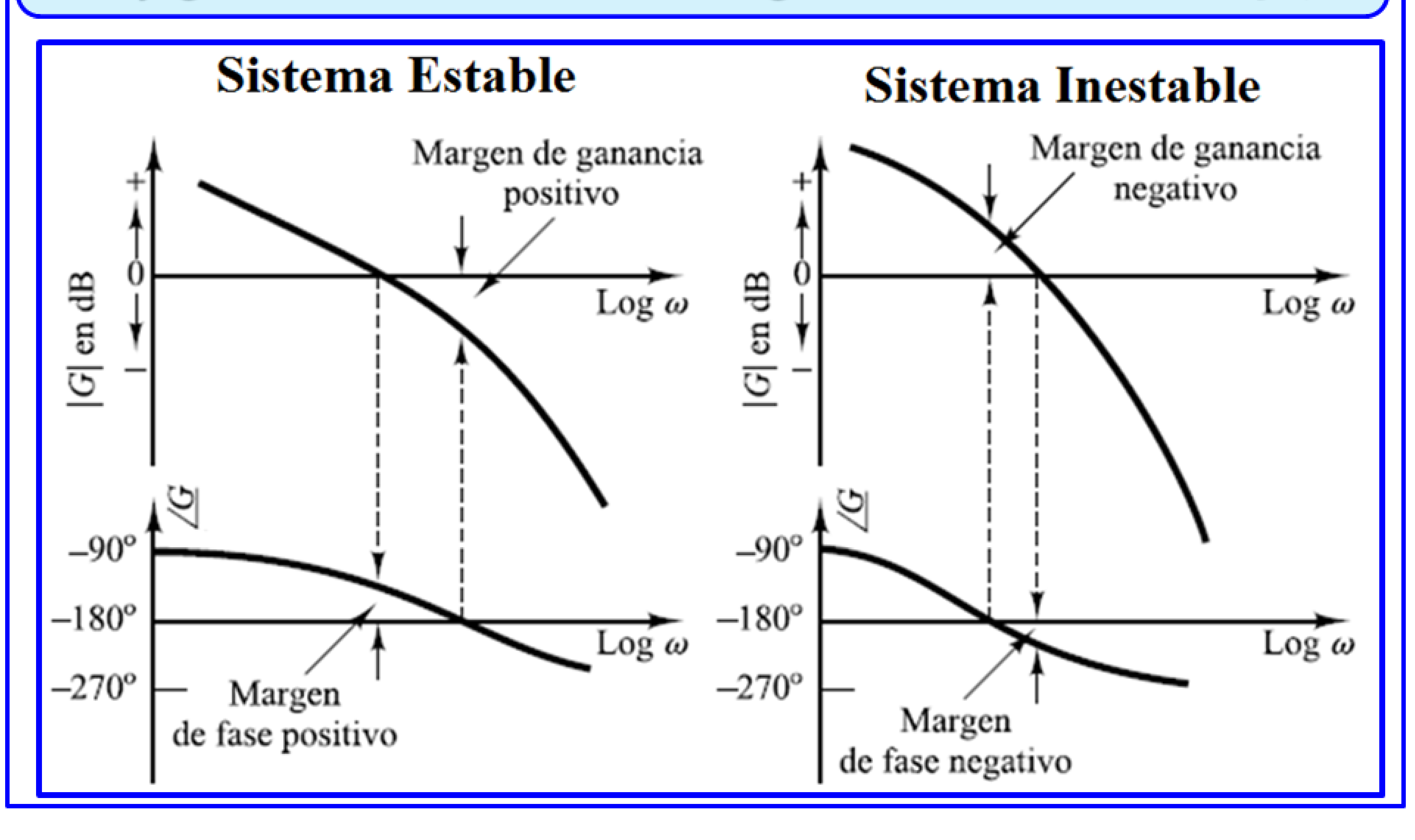
Margen de Ganancia y Margen de Fase

El uso de los márgenes de fase y ganancia están inspirados en el criterio de estabilidad de Nyquist. La idea clave es que es fácil dibujar el diagrama de Nyquist de la función de transferencia a lazo abierto $L(j\omega)$. Un incremento en la ganancia del controlador expande radialmente el diagrama de Nyquist y un incremento en la fase del controlador simplemente rota el diagrama de Nyquist en el sentido horario. Por lo tanto, del diagrama de Nyquist podemos conocer la cantidad de ganancia o fase que se puede agregar sin causar que el sistema se vuelva inestable.

Valores razonables para estos márgenes son:
Margen de ganancia Mg = 2 – 5
Margen de fase Mf = 30°– 60°

Margen de Ganancia y Margen de Fase con Bode

Usualmente obtenemos más fácilmente los margenes de fase y ganancia mediante los diagramas de Bode de $L(j\omega)$.



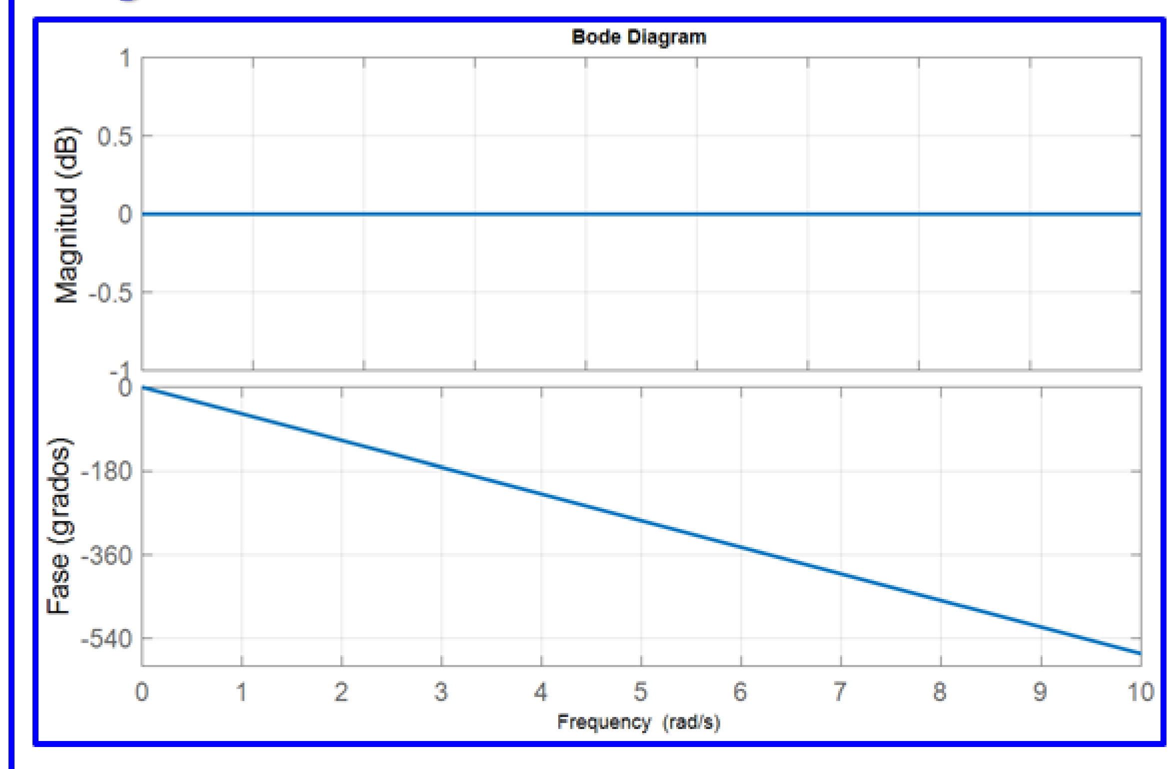
Sistemas con Retardo – Margen de Retardo

Retardo puro: $L(j\omega) = e^{-Tj\omega}$

Módulo constante $\left|L(j\omega)\right| = 1$ Fase lineal $\measuredangle L(j\omega) = -Tj\omega$

$\measuredangle L(j0) = 0^{o}$

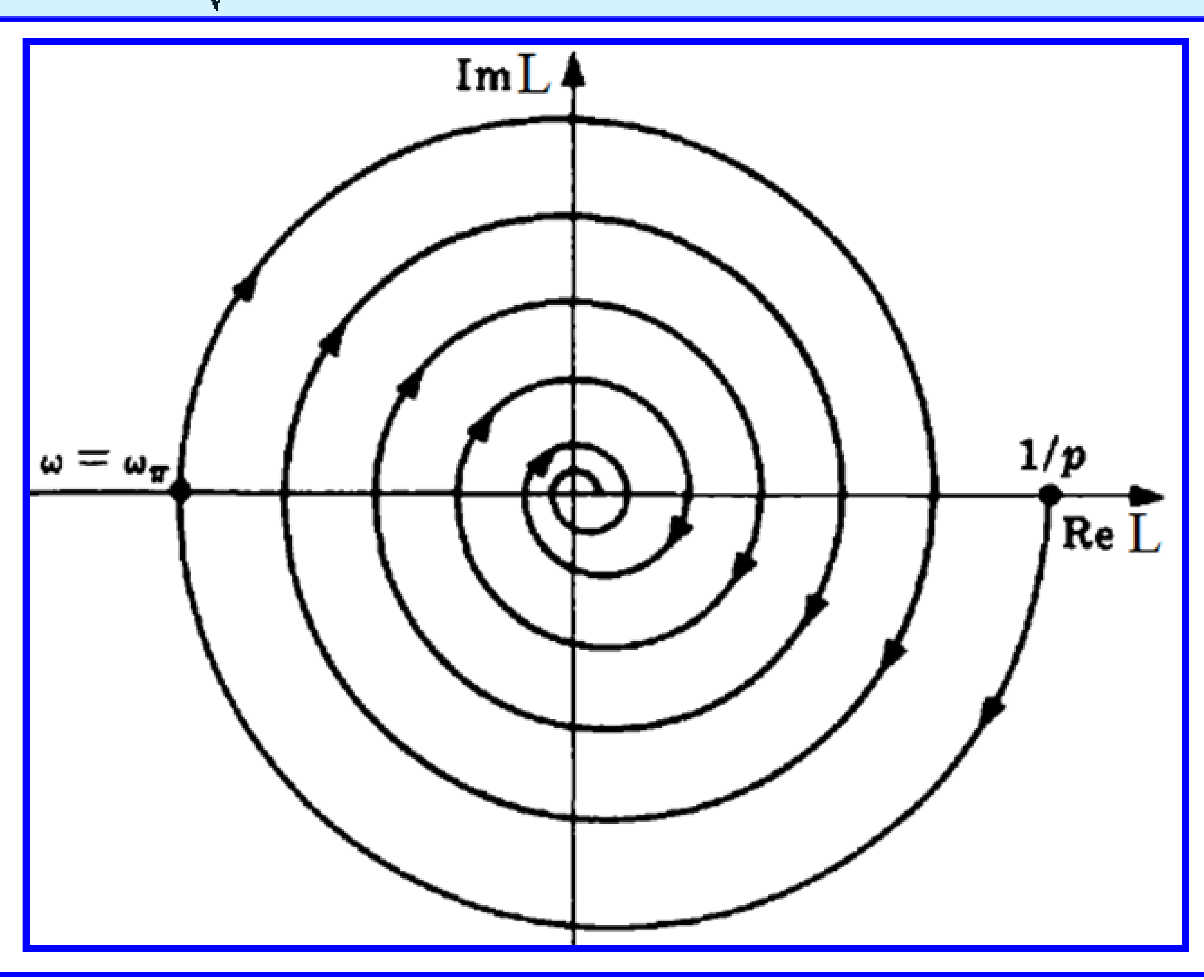
Diagrama de Bode con escala de frecuencia lineal



El retardo adicionado a una planta no modifica el modulo pero adiciona fase linealmente con la frecuencia. La pendiente de la fase es proporcional al retardo T.

Sistemas con Retardo – Margen de Retardo

$$L(j\omega) = \frac{e^{-Tj\omega}}{j\omega + p} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + p^2}} \measuredangle -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right) - T\omega, \;\; L(j0) = \frac{1}{p} \measuredangle 0^{\circ}$$



Sistemas con Retardo – Margen de Retardo

El margen de fase Mf también se puede interpreter como la cantidad de retardo puro T_{max} que se puede añadir al lazo, antes de que el mismo se vuelva inestable. A T_{max} se le denomina *margen de retardo*.

$$L_d(s) = L(s)e^{-sT}$$

$$1 + L_d(s) = 0 \Rightarrow 1 + L(s)\,e^{-sT} = 0$$

$$L(s)\,e^{-sT} = -1 \Rightarrow L(s) = -e^{sT}$$

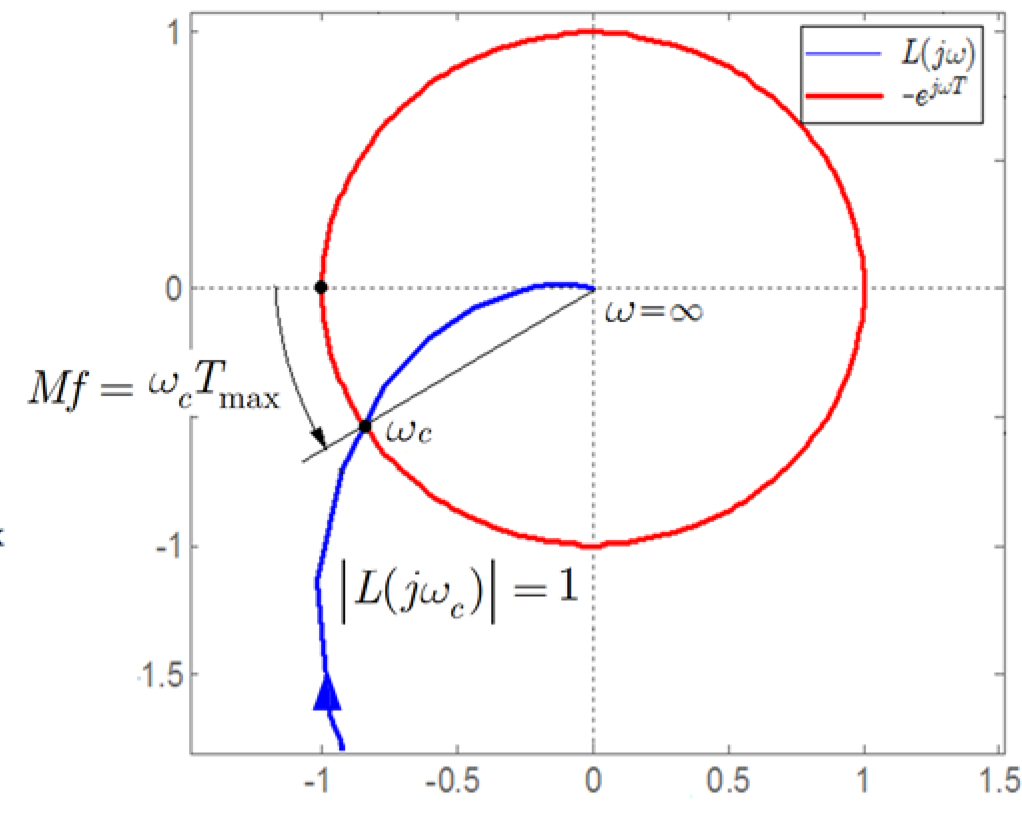
$$L(j\omega_c) = -e^{j\omega_c T_{max}}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \left|L(j\omega_c)\right| = \left|-e^{j\omega_c T_{max}}\right| = 1 \\ \measuredangle L(j\omega_c) = \measuredangle - e^{j\omega T_{max}} = \pi + \omega_c T_{max} \end{cases}$$

$$\measuredangle L(j\omega_g) = \pi + \omega_g T_{max} = \pi + Mf$$

$$\omega_c T_{max} = Mf \Rightarrow \boxed{T_{max} = \frac{Mf}{\omega_c}}$$



Margenes de Estabilidad con Matlab

```
[Gm,Pm,wc,wg] = margin(L)
```

`Gm = Margen de ganancia.`

`Pm = Margen de fase [grados]`

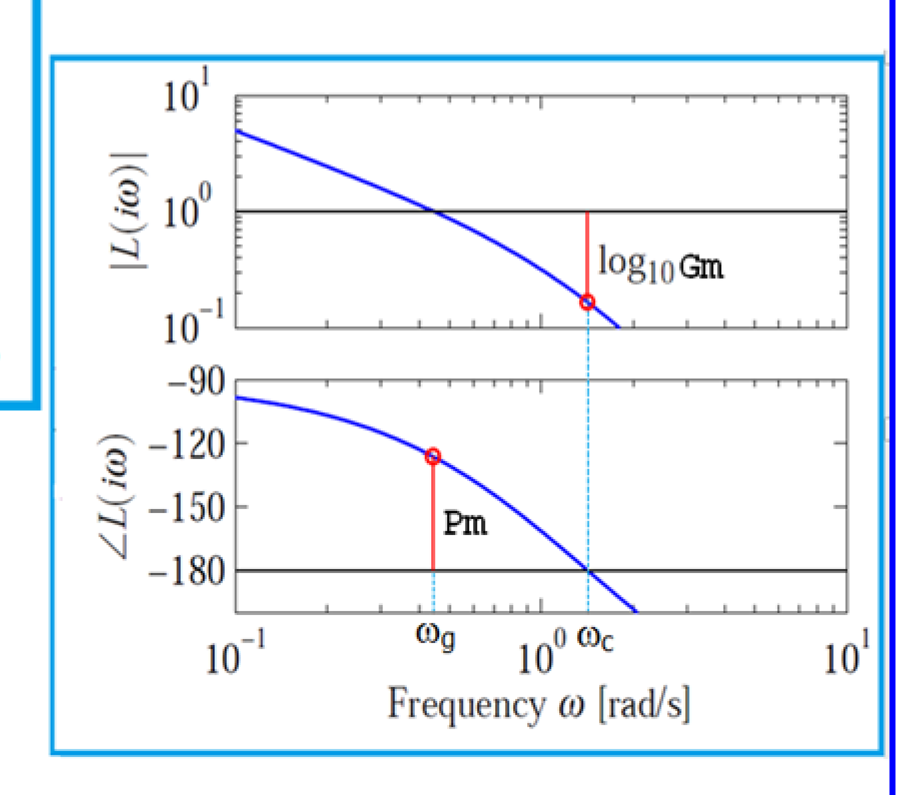
ω_c = Frecuencia de cruce de fase por $-\pi$.

$\angle L(j\omega)) = -180^o$ o $\mathcal{Im}\,[L(j\omega)] = 0)$, en [rad/seg].

ω_g = Frecuencia de cruce de ganancia por 0 dB.

$|L(j\omega)| = 1)$, en [rad/seg].

Para que el sistema sea estable debe ser $\omega_g < \omega_c$.



Margenes de Estabilidad con Matlab

```
margenes = allmargin(L)
```

`GainMargin:` Gm

`GMFrequency:` ω_c

`PhaseMargin:` Pm

`PMFrequency:` ω_g

`DelayMargin:` $T_{max}=Pm/\omega_g$ (retardo máximo que soporta el sistema)

`DMFrequency:` $=\omega_g$

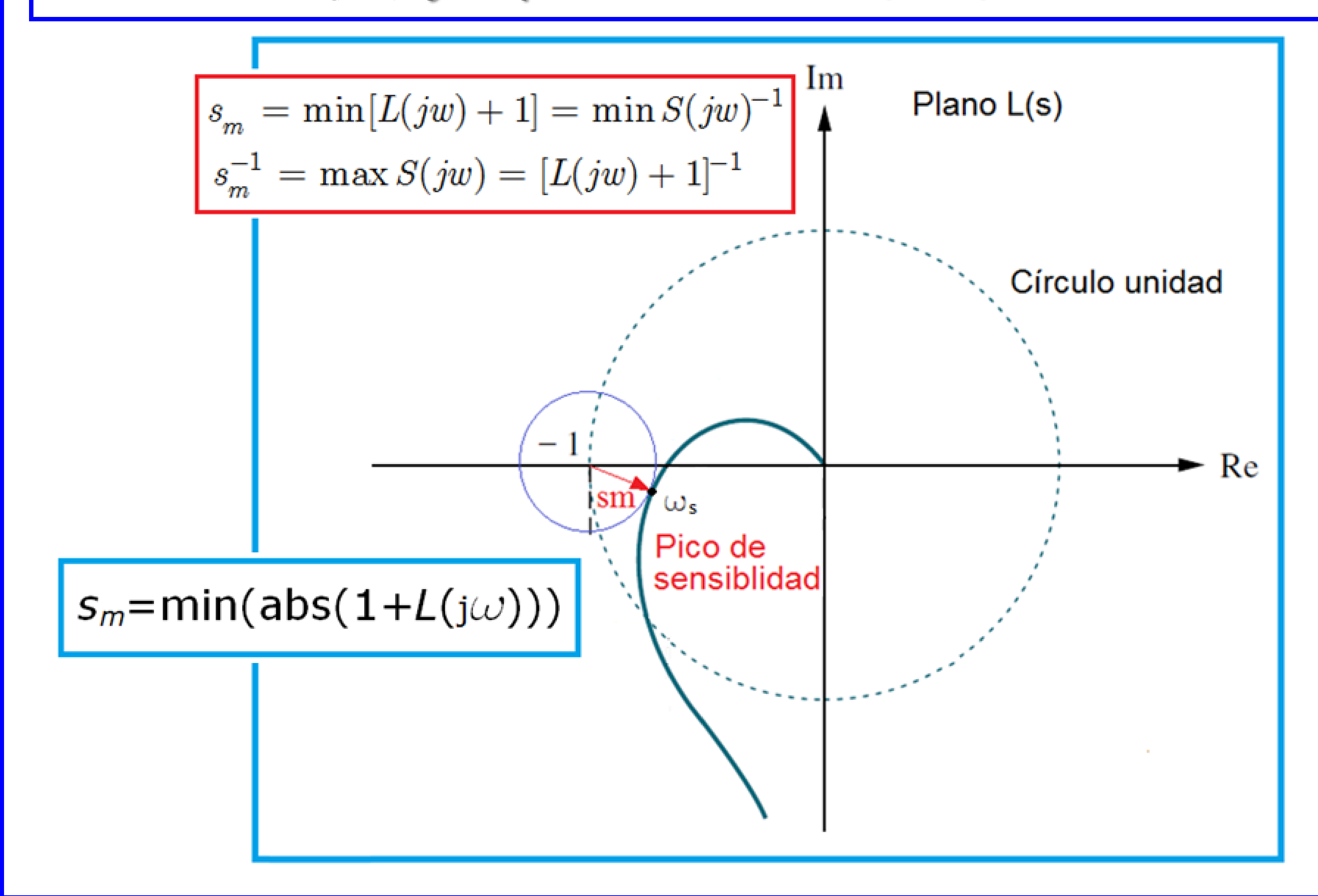
`Stable:` 1 (1 estable, 0 inestable)

Margen de Estabilidad (Pico de Sensibilidad)

Una desventaja con los márgenes de ganancia y fase es que es necesario conocerlos a ambos para garantizar que la curva de Nyquist no se encuentre cerca del punto crítico (-1,0).

Una forma alternativa de expresar estos márgenes con un solo número es mediante el margen de estabilidad Sm, que se define como la distancia más corta desde la curva Nyquist al punto crítico (-1,0).

Margen de estabilidad (sm): "Es la menor distancia entre la traza de $L(j\omega)$ y el punto crítico s=(-1,0).



$$s_m = \min[L(jw) + 1] = \min S(jw)^{-1}$$

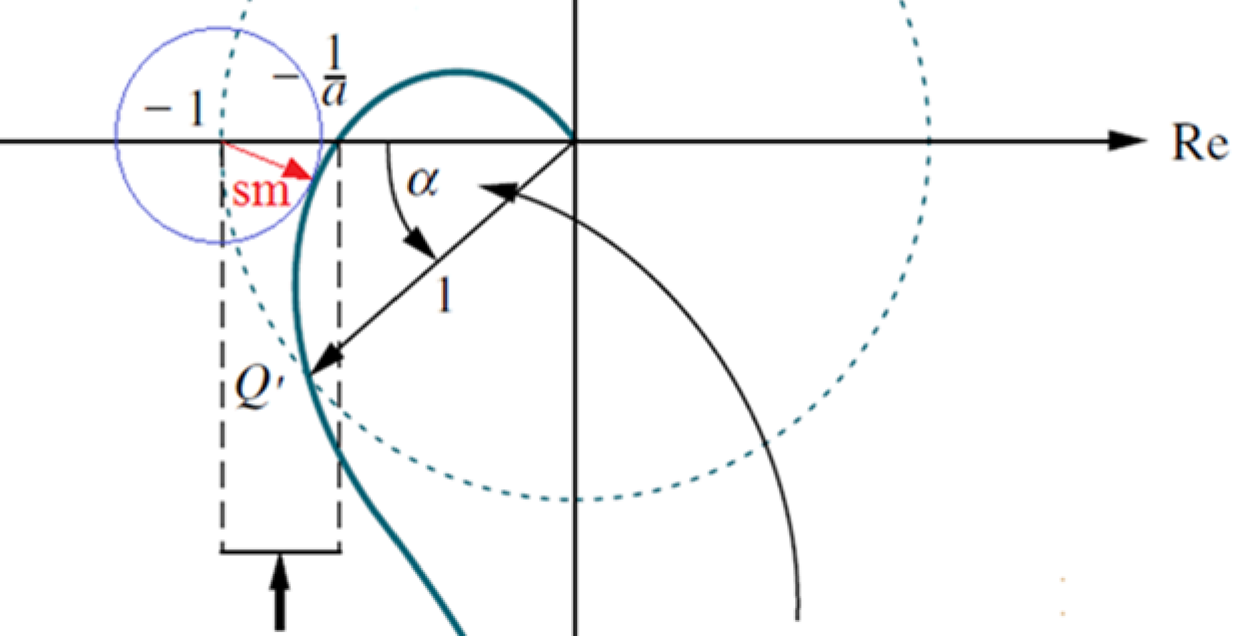
$$s_m^{-1} = \max S(jw) = [L(jw) + 1]^{-1}$$

Im

Plano L(s)

Círculo unidad

sm= Margen de estabilidad



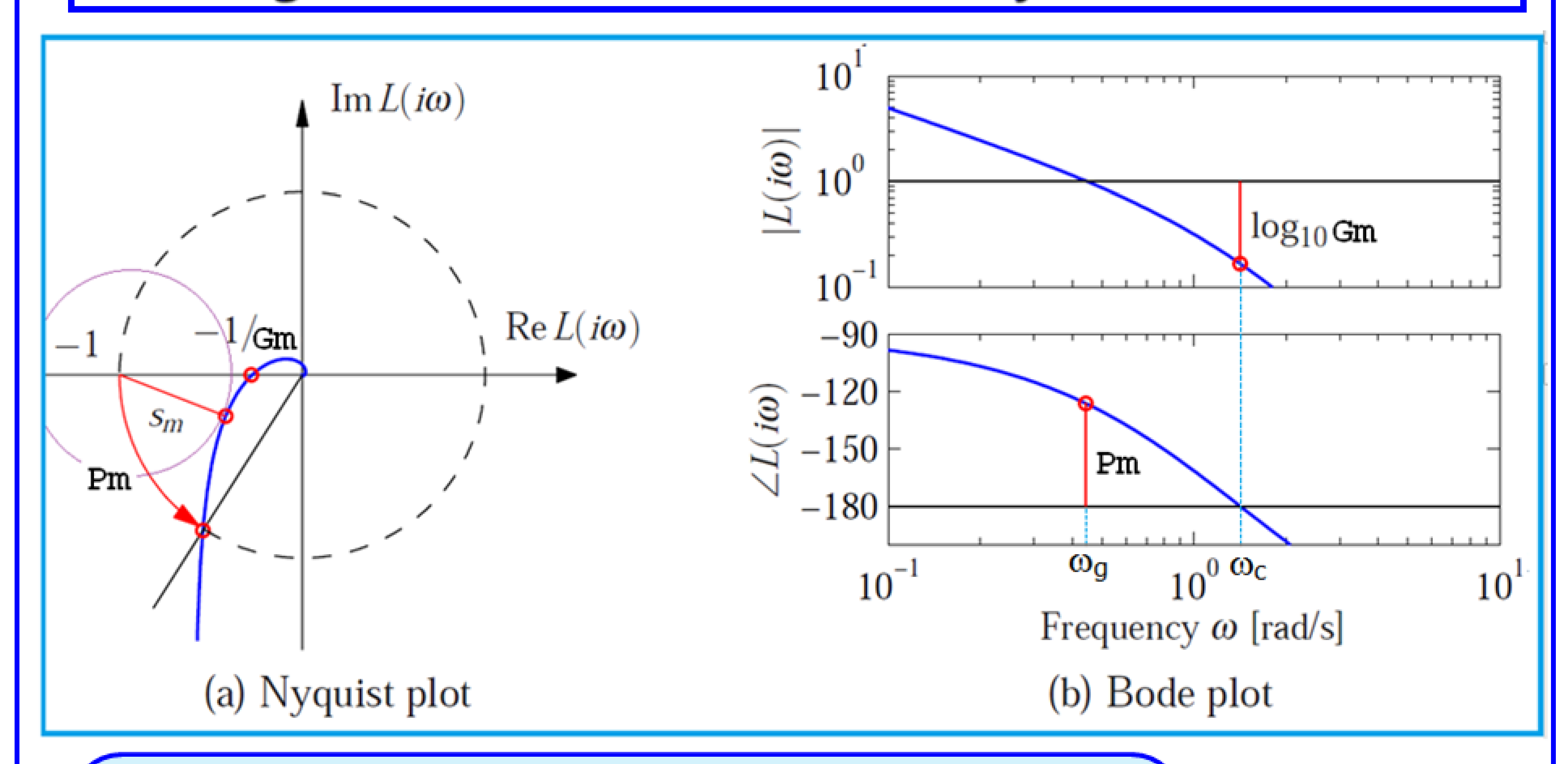
Diferencia de ganancia antes de la inestabilidad

Margen de ganancia $= G_M = 20 \log a$

Diferencia de fase antes de la inestabilidad

Margen de fase $= \Phi_M = \alpha$

Márgenes de Ganancia, de Fase y de Estabilidad



(a) Nyquist plot (b) Bode plot

Valores razonables para estos márgenes son:
Margen de ganancia Gm = 2–5
Margen de fase Pm = $30^\circ - 60^\circ$,
Pico de sensibilidad sm = 0.5 – 0.8.

Especificaciones de Diseño en el Dominio de la Frecuencia

Especificaciones de diseño

Vimos que diseñar un sistema de control implica cumplir con determinadas especificaciones y que las especificaciones de diseño se clasifican en estáticas o del estado estacionario y dinámicas.

a) Especificaciones estáticas o de estado estacionario: Corresponden al error máximo tolerado en el estado estacionario.

b) Especificaciones dinámicas

- b1) Especificaciones de estabilidad.
- b2) Especificaciones de velocidad.

Especificaciones estáticas o de estado estacionario en el dominio de la frecuencia

Las especificaciones estáticas o de estado estacionario son las mismas que en el dominio del tiempo:

- El máximo error tolerado en el estado estacionario e_{ss}
- Las constantes estáticas de error K_n

Especificaciones dinámicas en el dominio de la frecuencia

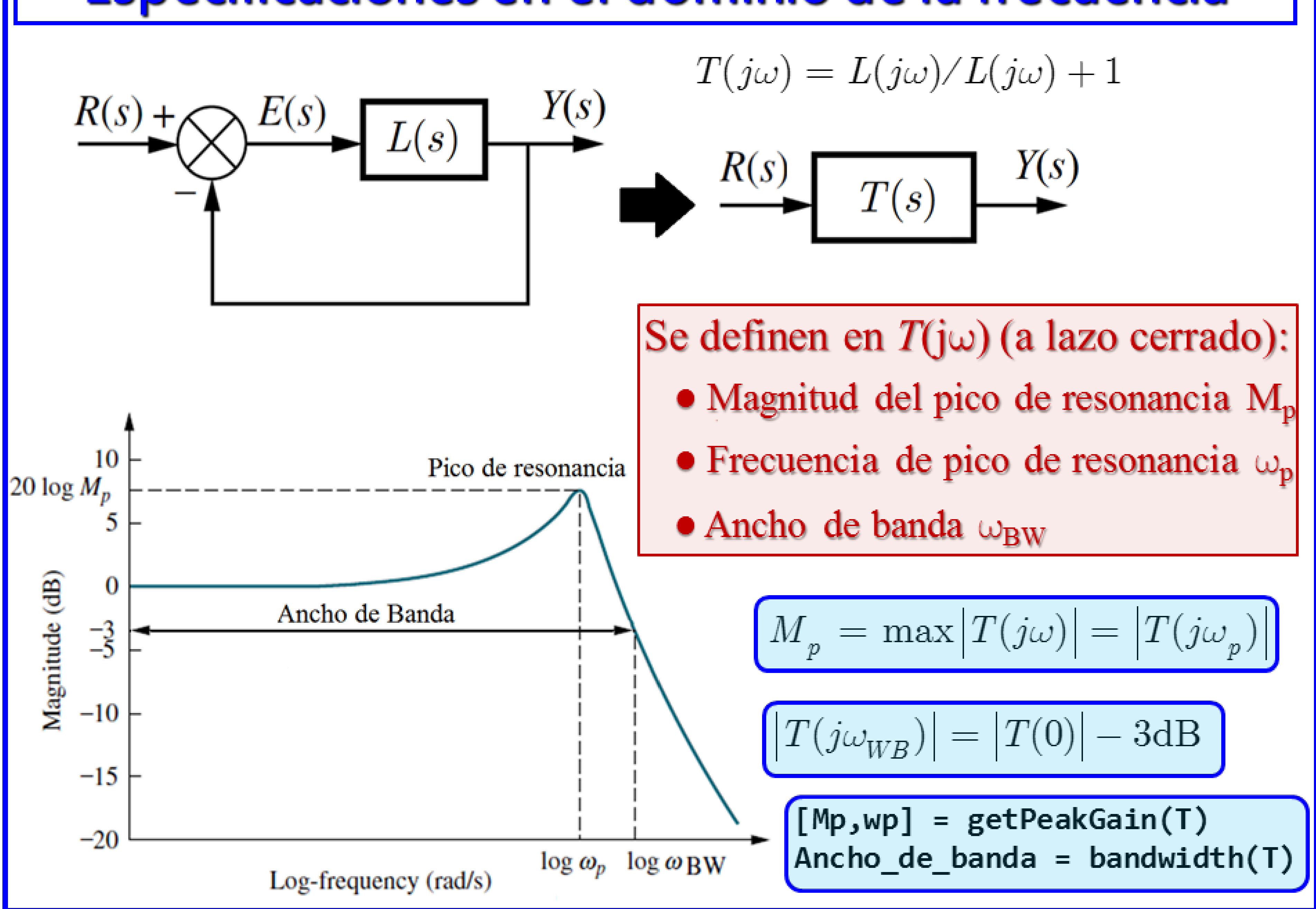
En los métodos de diseño en el dominio de la frecuencia las especificaciones dinámicas se dan de forma indirecta.

Especificaciones de estabilidad

- El margen de fase Mf
- El margen de ganancia Mg
- El pico de sensibilidad s_m
- Magnitud del pico de resonancia M_p

Especificaciones de velocidad

- La frecuencia de cruce de ganancia ω_c
- La frecuencia de resonancia ω_p
- El ancho de banda ω_{BW}


Especificaciones en el dominio de la frecuencia
$T(j\omega) = L(j\omega)/L(j\omega)+1$
R(s)
+
E(s)
L(s)
Y(s)
−
R(s)
T(s)
Y(s)
Se definen en T(jω) (a lazo cerrado):
● Magnitud del pico de resonancia M_p
● Frecuencia de pico de resonancia ω_p
● Ancho de banda ω_{BW}
$M_p = \max|T(j\omega)| = |T(j\omega_p)|$
$|T(j\omega_{WB})| = |T(0)| - 3\text{dB}$
[Mp,wp] = getPeakGain(T)
Ancho_de_banda = bandwidth(T)
Pico de resonancia
20 log M_p
10
5
0
−3
−5
−10
−15
−20
Ancho de Banda
Magnitude (dB)
log ω_p
log ω BW
Log-frequency (rad/s)

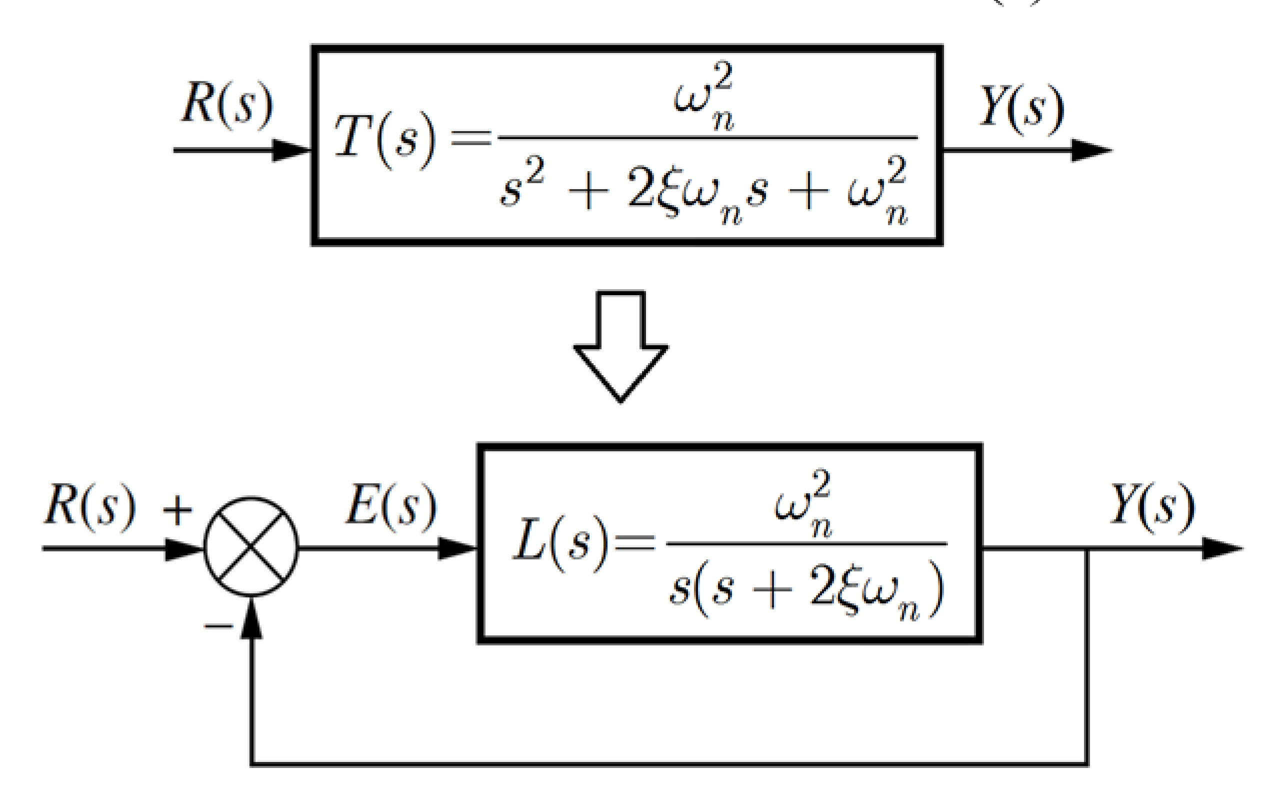
Relación entre las respuesta en frecuencia a lazo abierto y cerrado

La respuesta en frecuencia a lazo abierto se calcula fácilmente con los diagramas de Bode o con el diagrama de Nyquist. La respuesta en frecuencia a lazo cerrado tiene toda la información relevante del transitorio (vía T_p y ω_{BW}) y obviamente está relacionada con la respuesta en frecuencia a lazo abierto, *sin embargo, no existe una manera sencilla que permita calcular fácilmente la respuesta en frecuencia a lazo cerrado* (el problema de encontrar la respuesta a lazo cerrado a partir de la respuesta a lazo abierto clásicamente se resolvía con las Cartas de Nichols).

Combinaremos la facilidad de trazar la respuesta a lazo abierto con la información de la respuesta transitoria contenida en la respuesta a lazo cerrado. *Al igual que el diseño con el lugar de las raíces se desea que el sistema a lazo cerrado tenga un comportamiento aproximado de segundo orden.*

Especificaciones en el dominio de la frecuencia

Consideremos el sistema de segundo orden estándar $T(s)$ el cual puede interpretarse como un sistema con realimentación unitaria con la función de transferencia a lazo abierto $L(s)$.



Esta interpretación permite calcular el margen de fase y el margen de ganancia mediante los diagramas de Bode o de Nyquist de $L(s)$.

Relaciones entre las especificaciones temporales y frecuenciales

Polos dominantes complejos conjugados deseados:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\left.\begin{matrix} \%Os \\ \\ T_s, T_r, T_p \end{matrix}\right\} \rightleftarrows \zeta, \omega_n \rightleftarrows \left\{\begin{matrix} \bar{\phi}_L,\ s_n, M_p \\ \\ \omega_{BW},\ \omega_c^{'},\ \omega_p \end{matrix}\right.$$

ζ y ω_n permiten convertir las especificaciones entre los dominios temporal y frecuencial

Pico y frecuencia de resonancia vs. ζ

$$M(\omega) = |T(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}$$

Pico de resonancia de $T(s)$

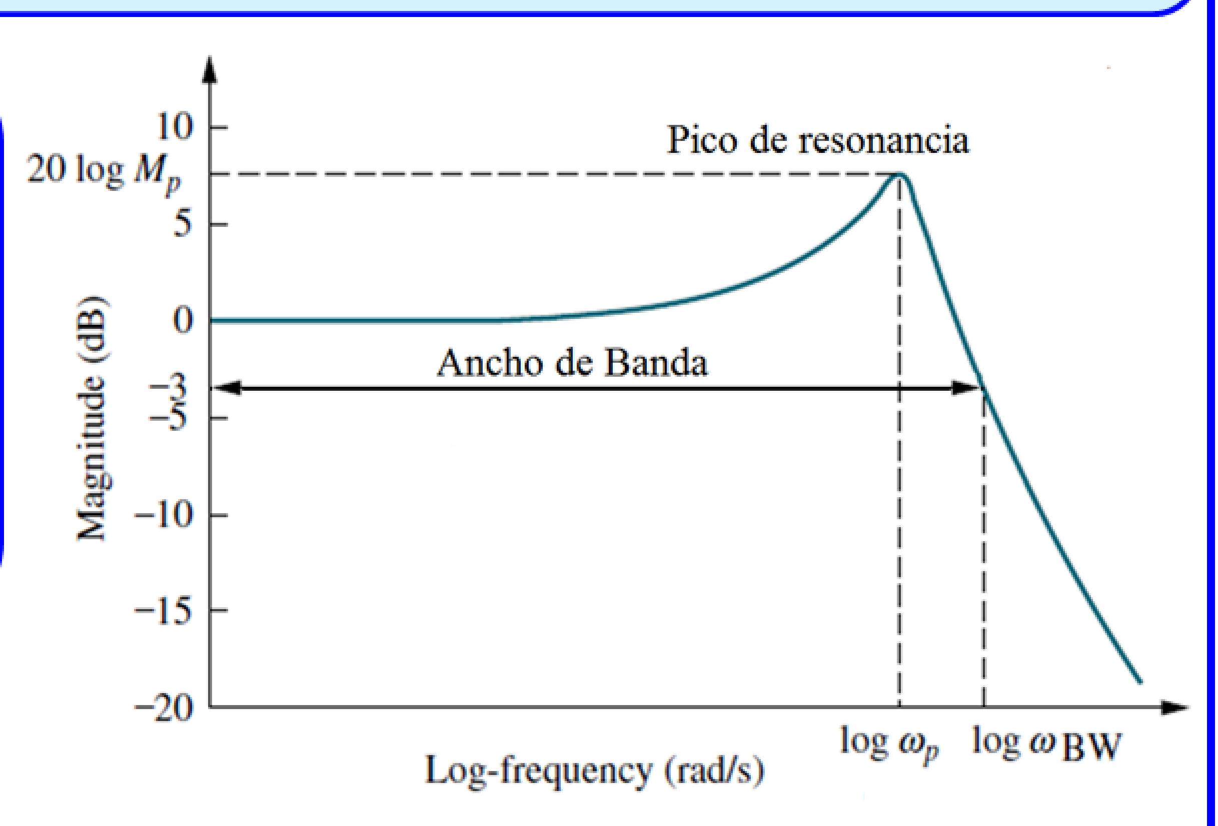
$$M_p = \max|T(j\omega)| = |T(j\omega_p)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}} \Leftrightarrow \zeta = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{M_p^{\,2}}}-1\right)}$$

Frecuencia de resonancia

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\omega_n = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$$



Relaciones entre las especificaciones temporales y frecuenciales

Para una ω_n determinada, el tiempo de subida *Tr* aumenta con un factor de amortiguamiento relativo ζ creciente. En cambio, el ancho de banda disminuye con el incremento de ζ. Por tanto, el tiempo de subida *Tr* y el ancho de banda son inversamente proporcionales.

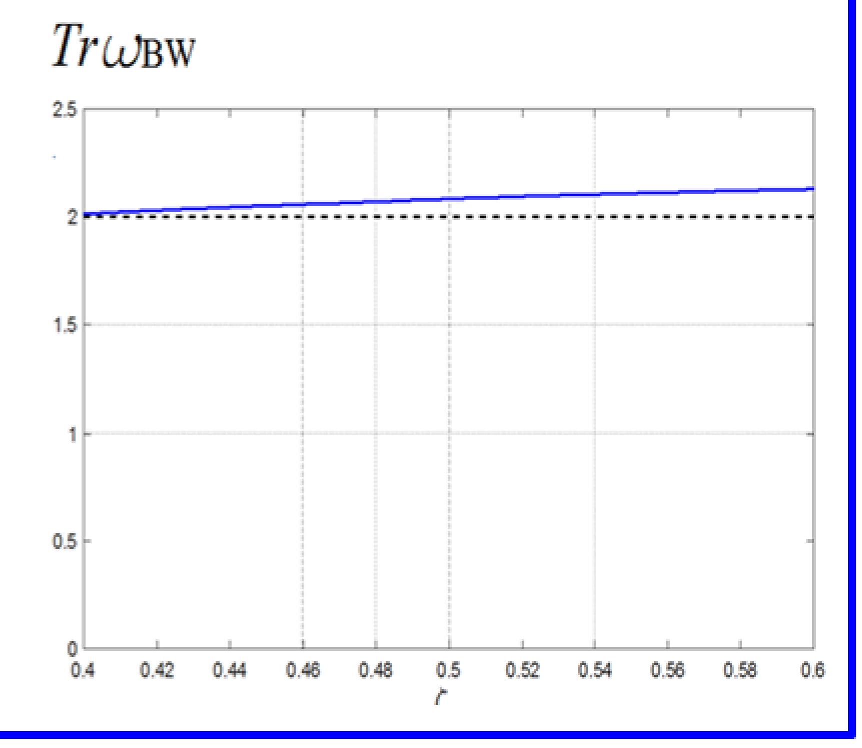
Producto Tiempo de Subida–Ancho de Banda

Siempre se cumple que: $Tr\,\omega_{BW} \geq 1$

El producto entre el tiempo de subida y el ancho de banda es aproximadamente constante. Para la mayoría de los sistemas la constante es cercana a 2.



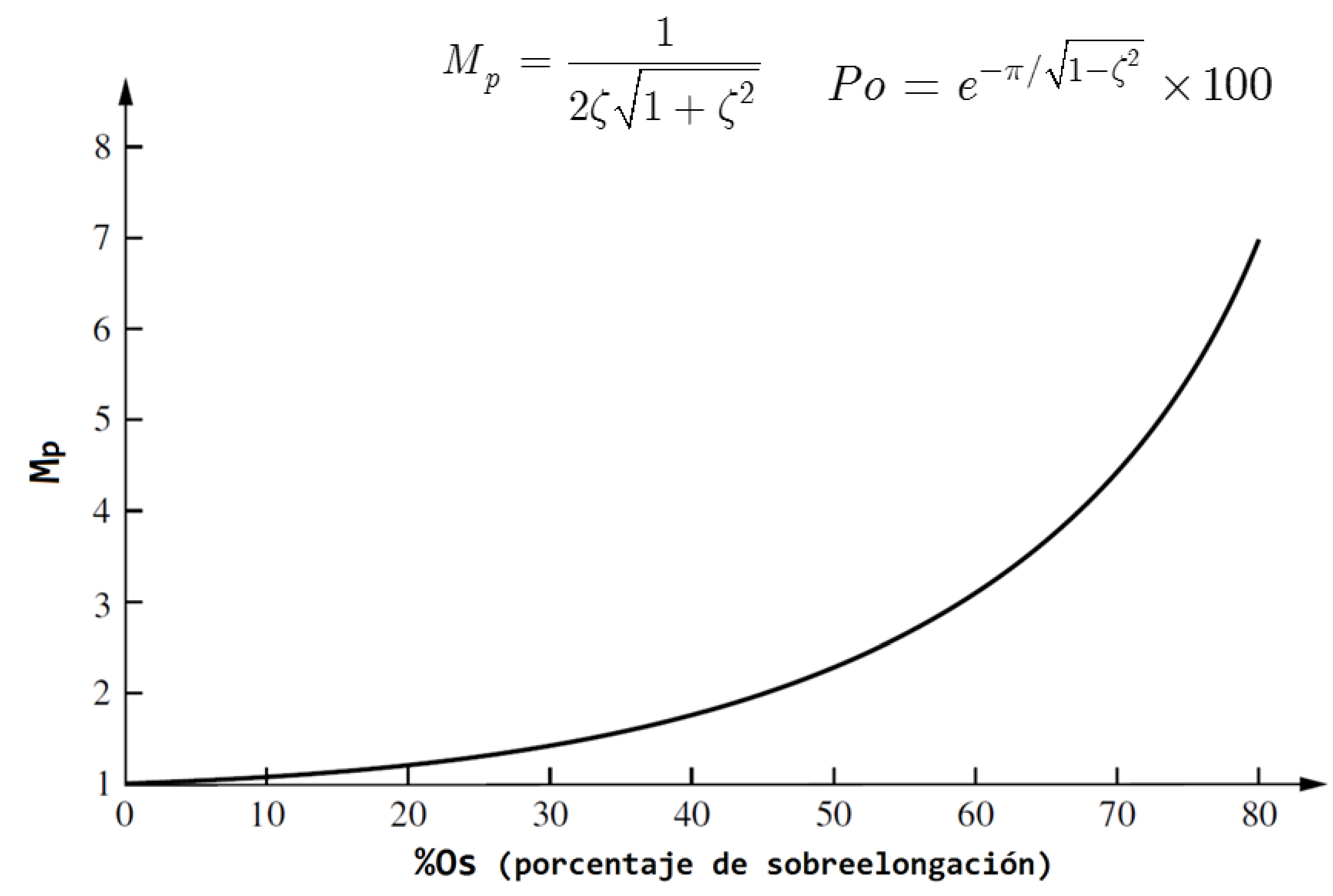
$$Tr\,\omega_{BW} \approx 2$$



Pico de resonancia Mp vs. %Os

Mp y *%Os* están relacionados entre si por ser funciones de ζ

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}} \qquad Po = e^{-\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100$$



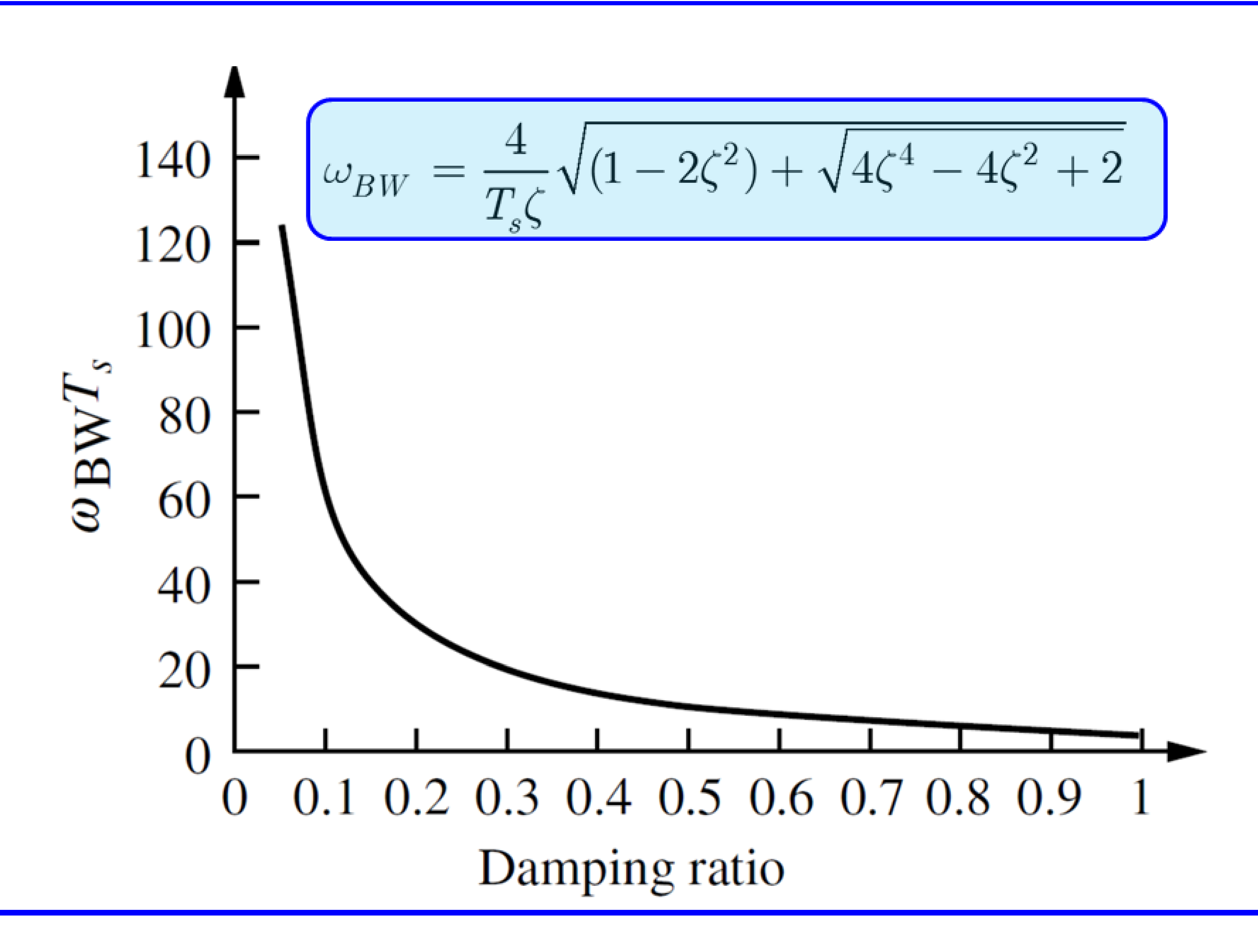
Ancho de banda ω_{BW} en función de T_s , T_p , T_r y ζ

$$\omega_{BW} = \frac{4}{T_s \zeta}\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}}$$

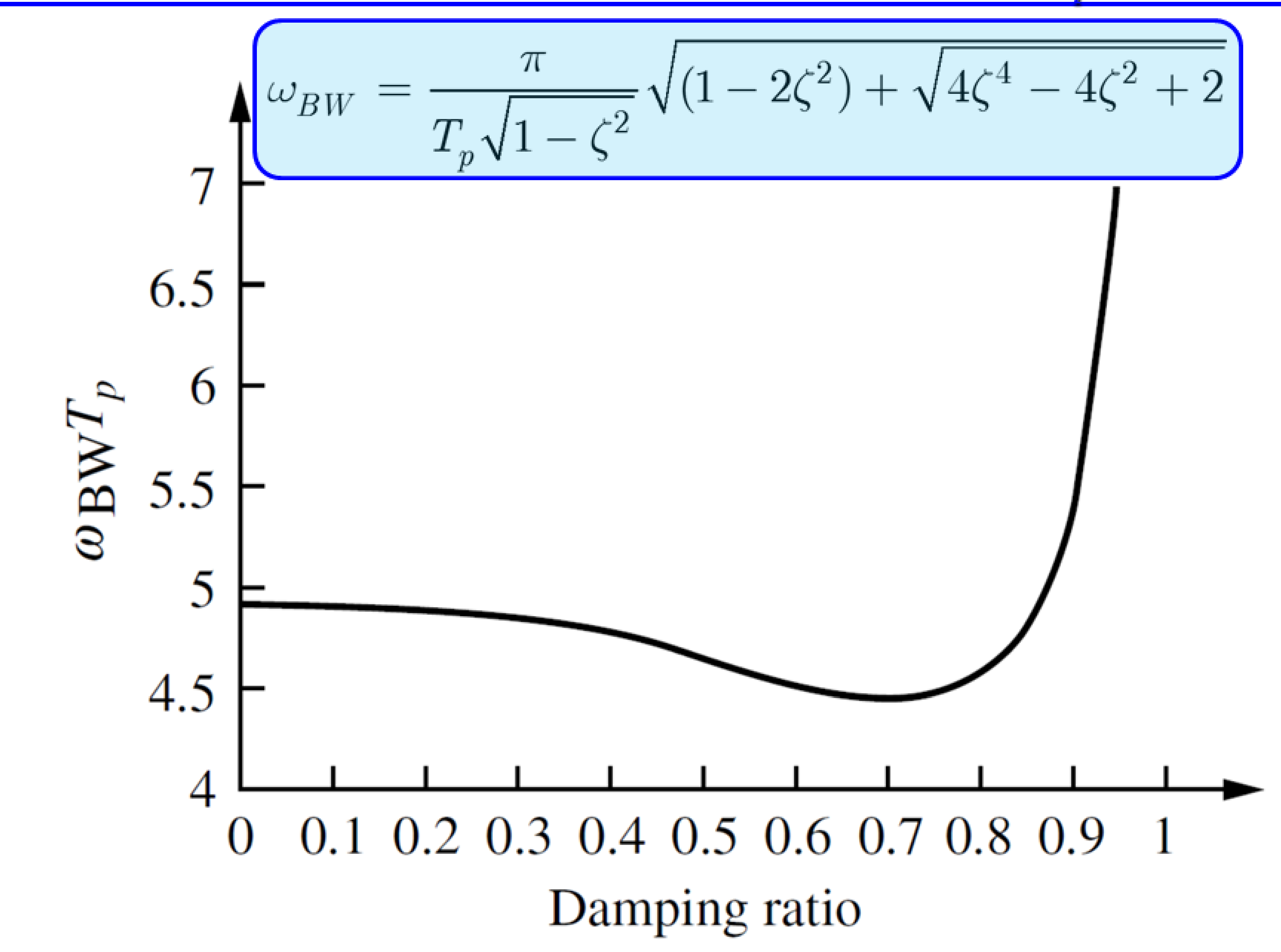
$$\omega_{BW} = \frac{\pi}{T_p\sqrt{1-\zeta^2}}\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}}$$

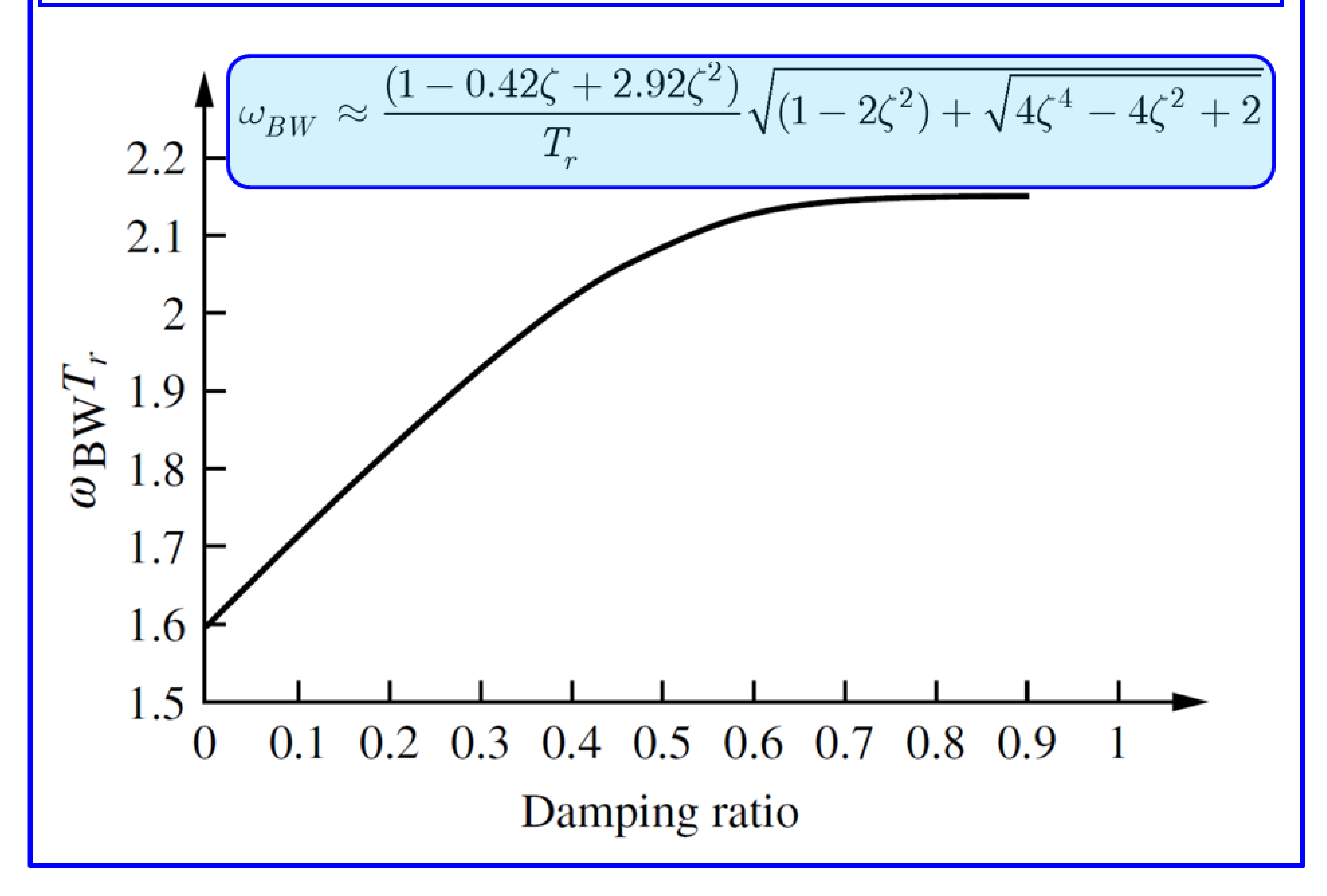
$$\omega_{BW} \approx \frac{(1-0.42\zeta+2.92\zeta^2)}{T_r}\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}}$$

Ancho de Banda Normalizado con T_s vs. ζ

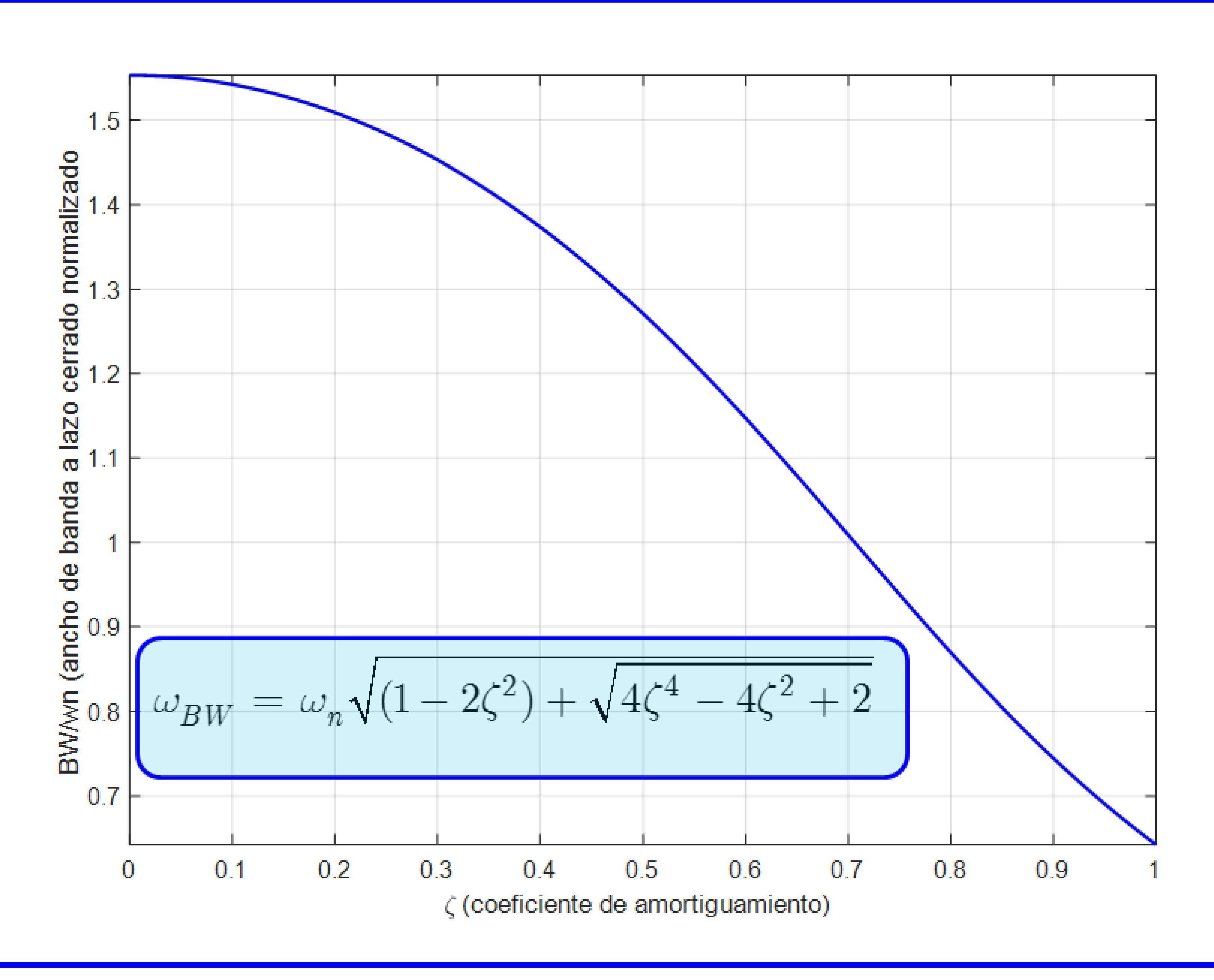


Ancho de Banda Normalizado con T_p vs. ζ

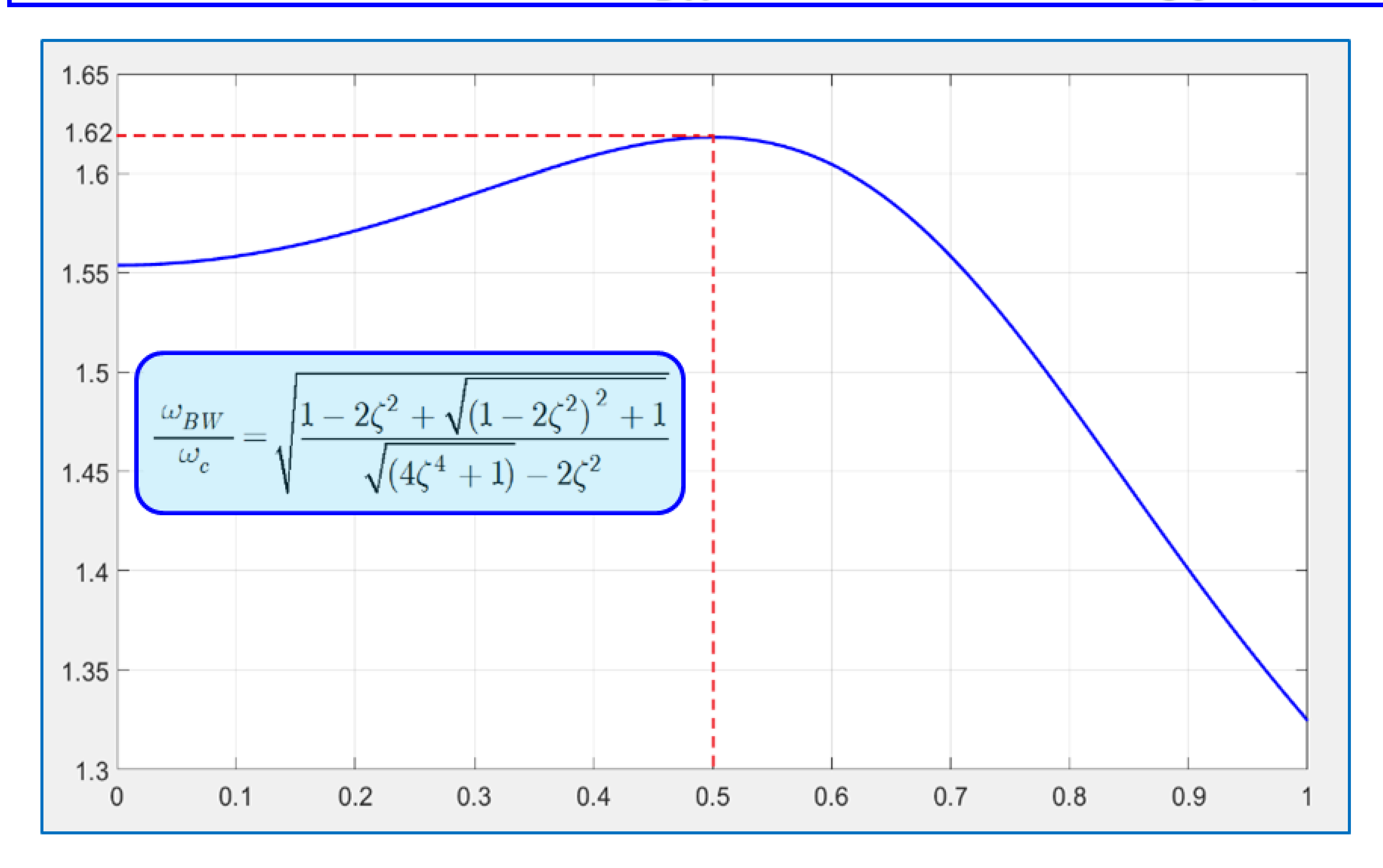



Ancho de Banda Normalizado con T_r vs. ζ
$\omega_{BW} \approx \frac{(1-0.42\zeta+2.92\zeta^2)}{T_r}\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}}$
2.2
2.1
2
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
$\omega_{\mathrm{BW}} T_r$
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Damping ratio

Ancho de banda ω_{BW} en función de ω_n y ζ

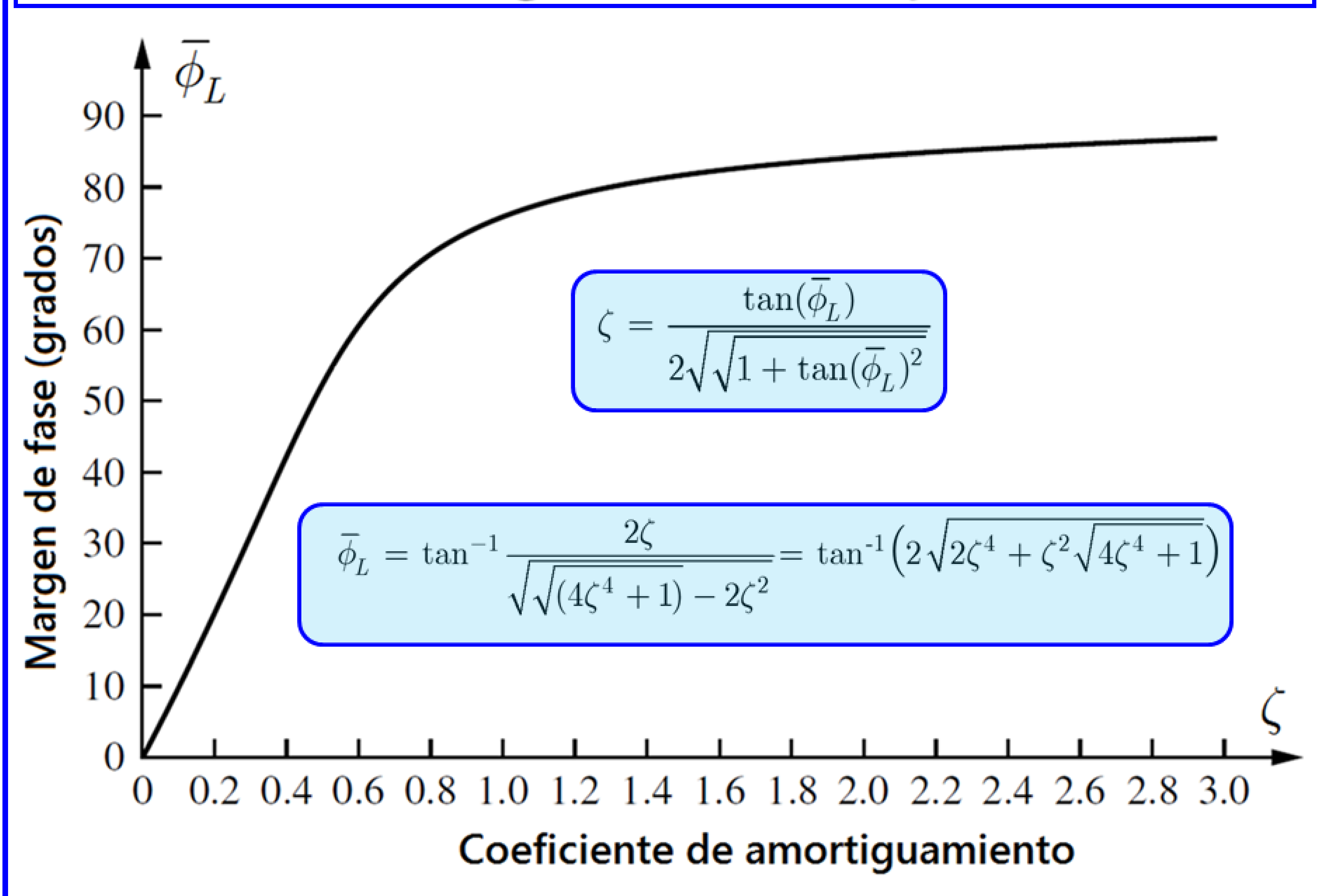


Ancho de banda ω_{BW} en función de ω_c y ζ

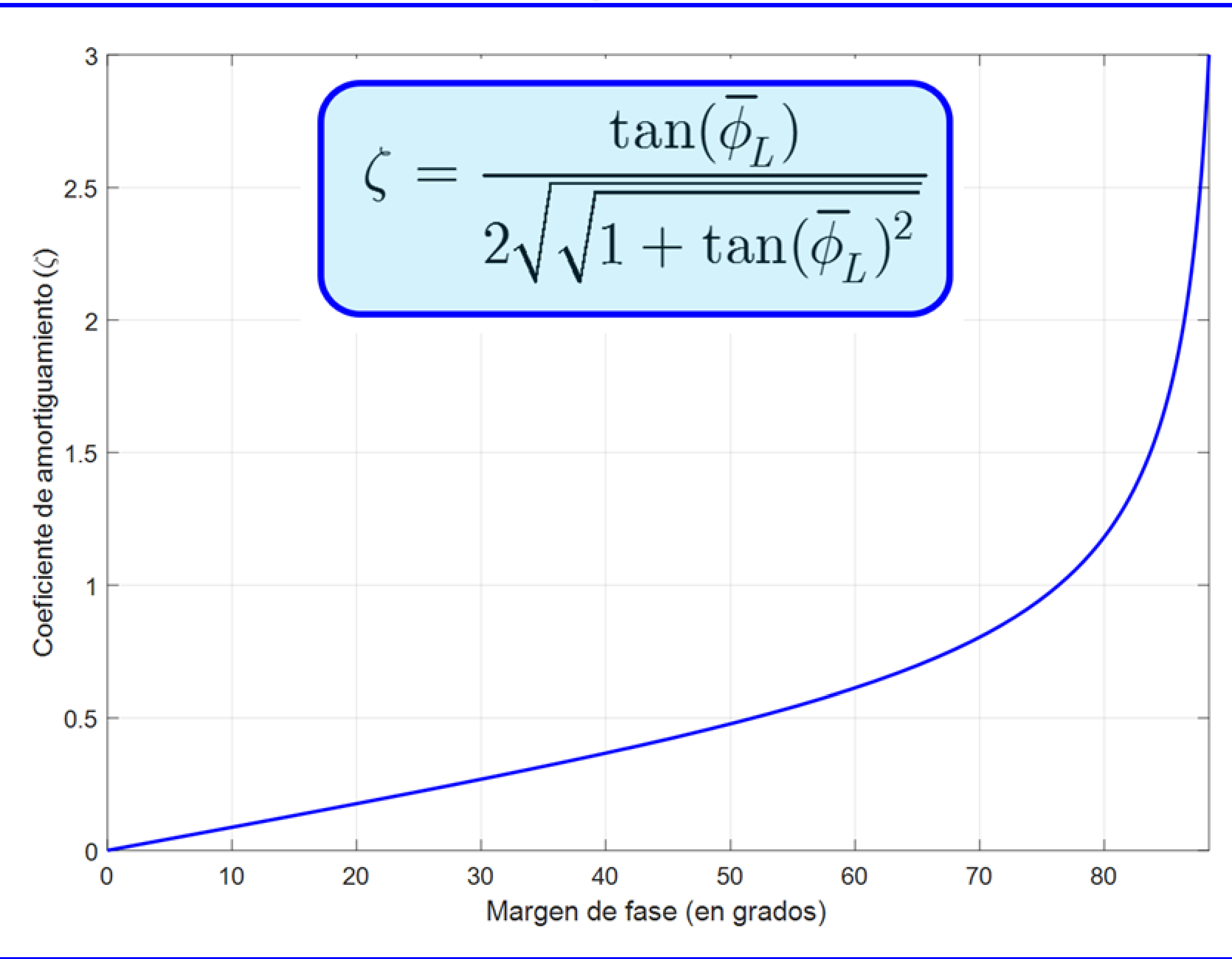


$\omega_c \leq \omega_{BW} \leq 1.62\omega_c$ normalmente se asume $\omega_c \leq \omega_{BW} \leq 2\omega_c$

Margen de Fase vs. ζ



ζ vs. Margen de Fase



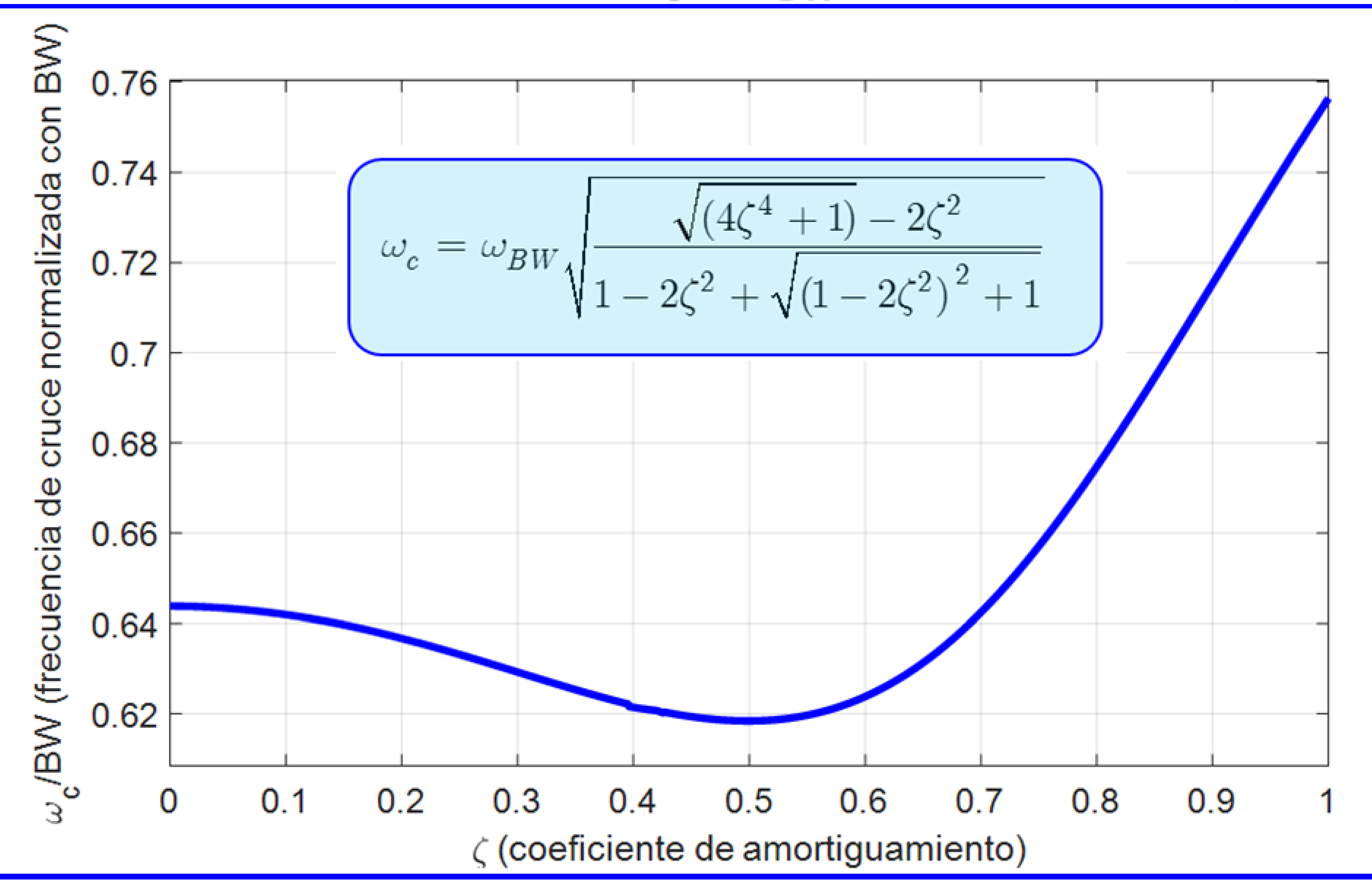
Frecuencia de cruce a lazo abierto ω_c en función de ω_n , ζ y ω_{BW} , ζ

$$\omega_c = \omega_n \left(\frac{2\zeta}{\tan(\bar{\phi}_L)} \right)$$

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}$$

$$\omega_c = \omega_{BW} \sqrt{\frac{\sqrt{(4\zeta^4 + 1)} - 2\zeta^2}{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{(1 - 2\zeta^2)^2 + 1}}}$$

Frecuencia de cruce a lazo abierto normalizada con el ancho de banda ω_c / ω_{BW} en función de ζ



Relación tiempo-

Frecuencia de cruce de ganancia, ω_c ⟷ Velocidad de respuesta ω_{bw}, t_r, t_s

Margen de fase (MF) ⟷ Sobreoscilación y resonancia ζ, M_p, M_r

Ganancia en baja frecuencia ⟷ Errores en régimen permanente K_p, K_v, ...

Tabla de especificaciones temporales y frecuenciales

Propiedad	Valor	
Rise time	$T_r \approx \omega_n^{-1}\left(1.76\zeta^3 - 0.417\zeta^2 + 1.039\zeta + 1\right)$	
Delay time	T_d	
Peak time	$T_p \approx \pi/\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = T_d/2$	
Settling time	$T_s \approx 4/(\zeta\,\omega_n)$ (2%)	$T_s \approx 3/(\zeta\,\omega_n)$ (5%))
% Overshoot	$Po = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$ x100	
Error coefficients	$e_0 = 0,\ e_1 = 2\zeta/\omega_n$	
Closed loop Bandwidth	$\omega_{BW} = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{(1-2\zeta^2)^2+1}}$	
Gain margin	$M_g = \infty$	
Phase margin	$M_f = \arctan 2\zeta\Big/\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}$	
Crossover frequency	$\omega_c = \omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}$	

Control II -2024

Ventajas del diseño de compensadores en el dominio de la frecuencia

Fernando di Sciascio

Diseño de compensadores en el dominio de la frecuencia

$L(j\omega)$

$R(j\omega)$ + − $G_c^*(j\omega)$ $G(j\omega)$ $Y(j\omega)$

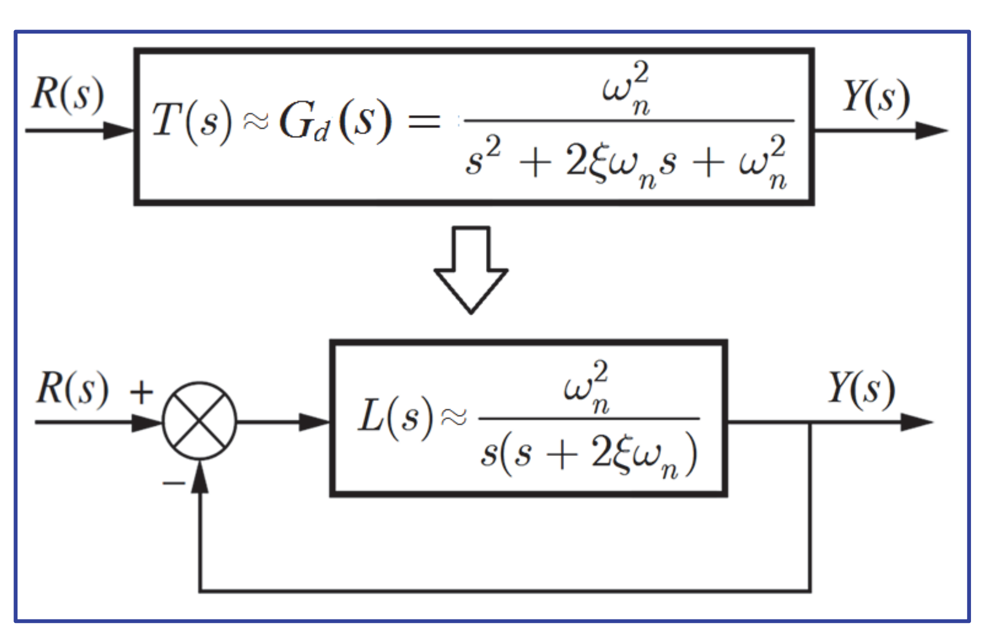
$T(j\omega)$

$R(j\omega)$ + − $L(j\omega)$ $Y(j\omega)$

$R(j\omega)$ $T(j\omega)$ $Y(j\omega)$

$$T(s) \approx G_d(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$T(0) = 1$$



$L(s)$ se debe comportar aproximadamente como un sistema de segundo orden tipo 1.

$$L(s) = G_c(s)G(s) \approx \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

El diseño clásico de los compensadores en serie en el dominio de la frecuencia, normalmente se prefieren los diagramas de Bode por sobre el de Nyquist, pues el sistema compensado a lazo abierto $L(s)$ se obtiene fácilmente añadiendo las curvas de magnitud y fase del compensador $G_c(j\omega)$ a los del sistema básico sin compensar $G(j\omega)$.

$$L(j\omega) = G_c(j\omega)G(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left|L(j\omega)\right|_{\mathrm{dB}} = \left|G_c(j\omega)\right|_{\mathrm{dB}} + \left|G(j\omega)\right|_{\mathrm{dB}} \\ \measuredangle L = \measuredangle G_c(j\omega) + \measuredangle G(j\omega) \end{cases}$$

Ventajas del diseño en el dominio de la frecuencia

1) Es el método de diseño más utilizado en la industria

El diseño basado en la respuesta en frecuencia es popular principalmente porque proporciona buenos diseños ante la incertidumbre en el modelo de la planta.

2) El uso de escalas logarítmicas permite visualizar en una gráfica un rango de frecuencias muy amplio

3) Los diagramas de Bode de funciones de transferencias en serie simplemente se adicionan

$$L(j\omega) = G_c^*(j\omega)G(j\omega) \;\Rightarrow\; \begin{cases} \left|L(j\omega)\right|_{\mathrm{dB}} = \left|G_c^*(j\omega)\right|_{\mathrm{dB}} + \left|G(j\omega)\right|_{\mathrm{dB}} \\ \measuredangle L = \measuredangle G_c^*(j\omega) + \measuredangle G(j\omega) \end{cases}$$

4) Puede utilizarse en sistemas con retardo más fácilmente que con el método del lugar de las raíces

La respuesta en frecuencia del retardo puro T_d es:

$$e^{-j\omega T_d} \Rightarrow \begin{cases} \left| e^{-j\omega T_d} \right| = 1 \Rightarrow \left| e^{-j\omega T_d} \right|_{\mathrm{dB}} = 0\,\mathrm{dB} \\ \measuredangle e^{-j\omega T_d} = -\omega T_d \quad (\mathrm{lineal\,en}\,\omega) \end{cases}$$

El diagrama de magnitud en dB es constante en 0 dB y la fase varía linealmente con pendiente negativa con la frecuencia.

Los diagramas de Bode de la función de transferencia con retardo $G(j\omega)e^{-j\omega T_d}$ es:

$$G(j\omega)e^{-j\omega T_d} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left| G(j\omega)e^{-j\omega T_d} \right|_{\mathrm{dB}} = \left| G(j\omega) \right|_{\mathrm{dB}} \\ \measuredangle G(j\omega)e^{-j\omega T_d} = \measuredangle G(j\omega) - \omega T_d \end{cases}$$

Se observa que el retardo no modifica el diagrama de magnitud en dB y que la fase se adiciona linealmente a la de $G(j\omega)$. Por lo tanto, el manejo de sistemas con retardo con los diagramas de Bode es muy sencillo.

Una función de transferencia que incluya retardo ya no es un cociente de polinomios, de los cuales simplemente se obtienen polos y ceros. Por lo tanto, ahora, el método de lugar de las raíces no se puede aplicar directamente, se puede aproximar el retardo con una aproximación de Pade pero el resultado es inferior al de utilizar la respuesta en frecuencia.

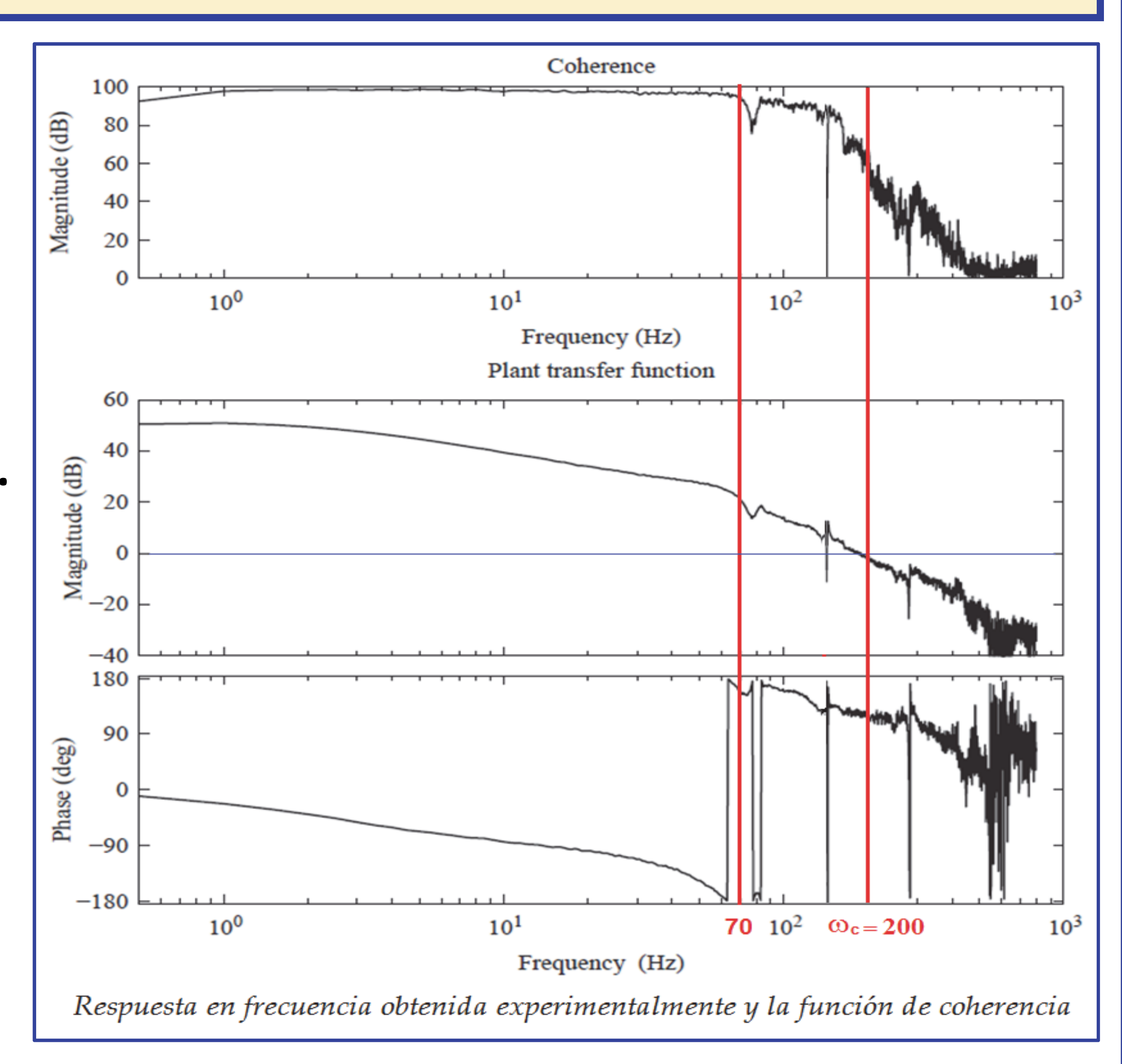
5) El diseño en el dominio de la frecuencia puede realizarse gráficamente utilizando directamente los diagramas de Bode (datos experimentales)

No se requiere un procesamiento intermedio de los datos como determinar los polos y ceros que permitan obtener la función de transferencia (aunque en el curso si las utilizamos en los ejemplos y ejercicios). Es suficiente con el gráfico de magnitud con las asíntotas, no hacen falta los valores verdaderos en las cercanías de los polos dobles reales o complejos, el error con esta aproximación es pequeño y siempre se puede reajustar si los resultados no son del todo satisfactorios.

6) Los diagramas de Bode son más fáciles de obtener experimentalmente

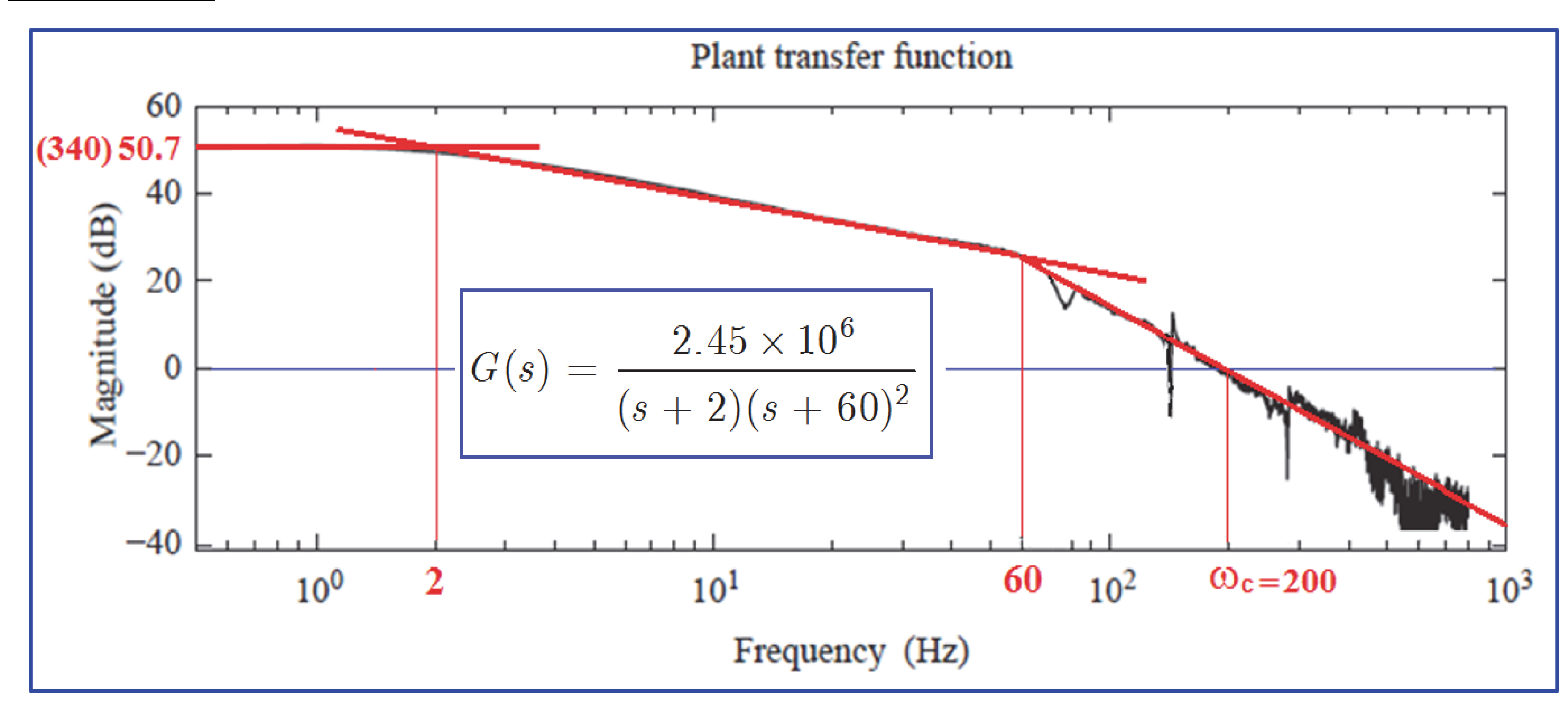
Existen instrumentos comerciales para obtenerla fácilmente, por ejemplo, el HP3562A Dynamic System Analyzer.

Las funciones de transferencia son menos confiables en alta frecuencia.



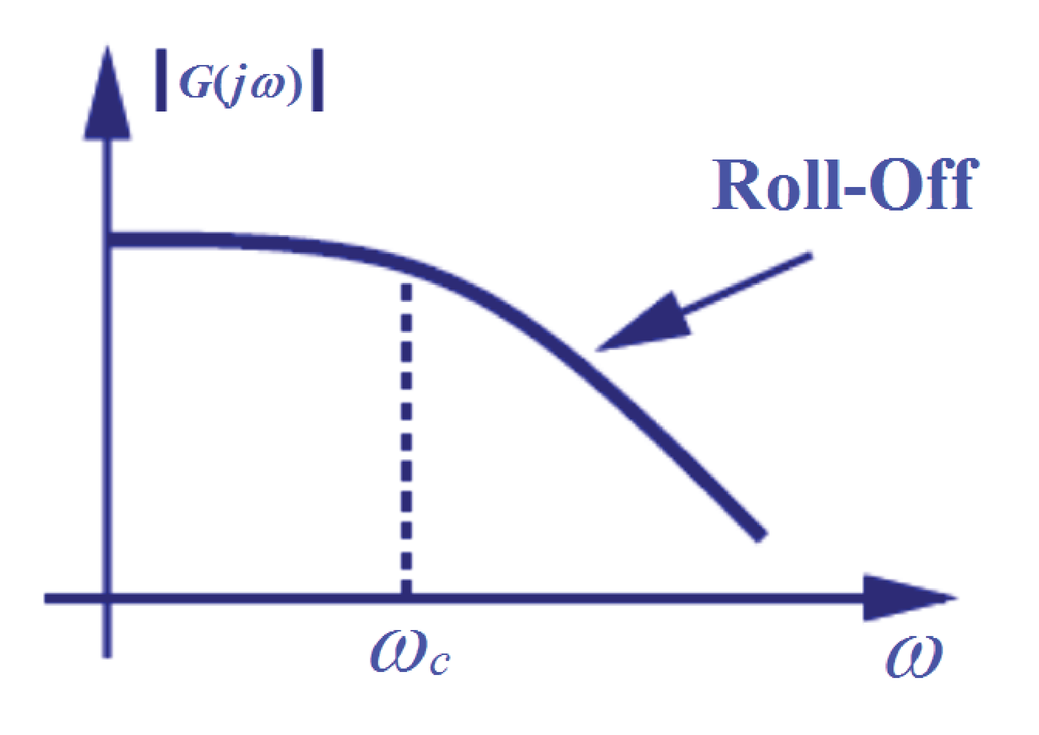
Respuesta en frecuencia obtenida experimentalmente y la función de coherencia

El diagrama de fase anterior muestra que el sistema es de fase mínima, entonces es posible obtener la función de transferencia aproximada del diagrama de magnitud. *La función de coherencia muestra que la función de transferencia no es confiable por arriba de 70 Hz*.



Atenuación en altas frecuencias (High-Frequency Roll-off)

Los modelos matemáticos de las plantas son poco precisos en el rango de frecuencias altas. Por lo tanto, es necesario minimizar la actividad de control en la región de alta frecuencia minimizando el ancho de banda a lo estrictamente necesario.



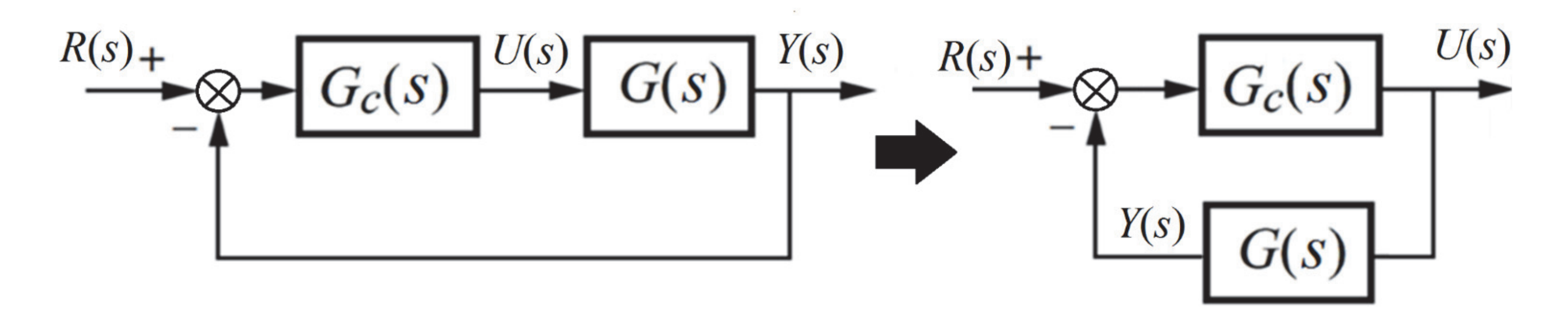
Los beneficios adicionales de un menor ancho de banda son:

i) La reducción de la sensibilidad al ruido (principalmente de los sensores) y las perturbaciones de alta frecuencia.

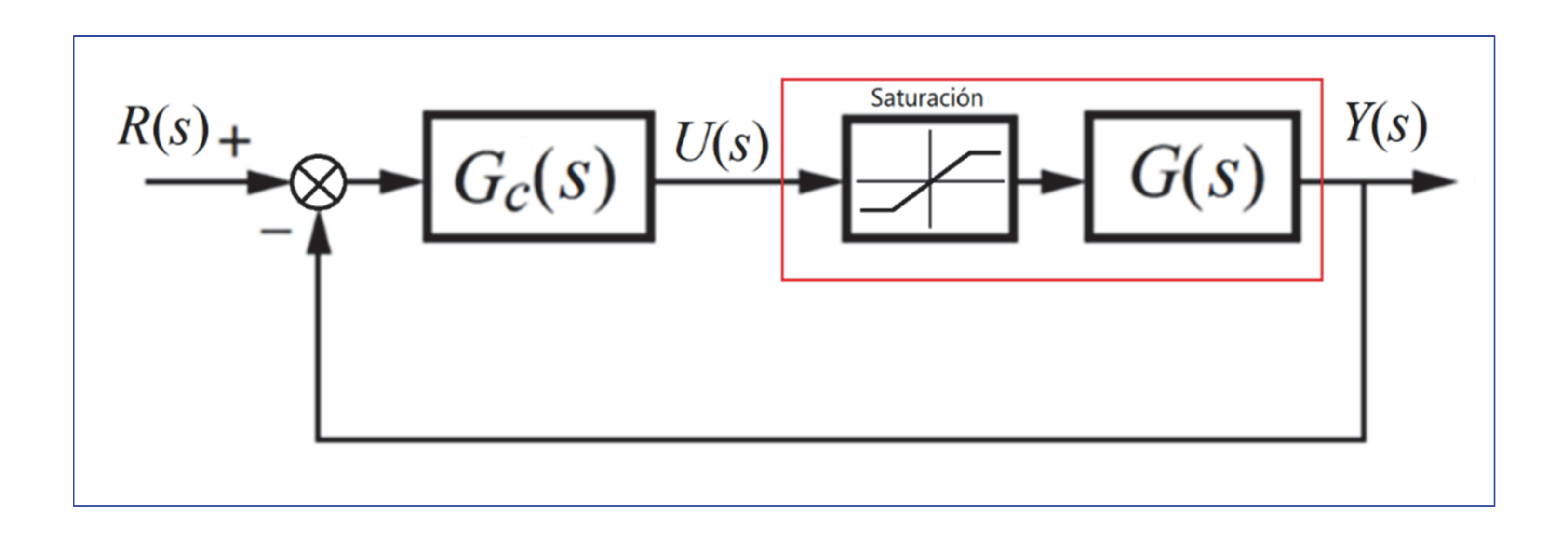
ii) La planta puede tener polos en alta frecuencia que limitan el ancho de banda, por ejemplo, polos cercanos entre sí que generan efectos de resonancia.

iii) Evita la saturación de los actuadores y los problemas de slew-rate (máxima velocidad con que puede cambiar la salida de un actuador).

Análisis de la saturación de los actuadores



$$U(s) = \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G(s)} R(s)$$



Amplitud de la salida

12r/s

8r/s

6r/s

Tiempo (segundos)

Acciónes de control

Tiempo (segundos)



En todo sistema físico, mientras más rápido sea el sistema (mayor sea su ancho de banda o frecuencia de cruce), mayores serán las acciones de control necesarias (requisitos de potencia en el mundo físico) para "mover" el sistema con la velocidad requerida.

Si el controlador se diseña sin considerar el actuador, es muy posible que se exceda las amplitudes que el actuador puede manejar. En este caso sencillamente la acción de control efectiva no es la que entrega el controlador sino la que permite el actuador.

Control II -2024

Compensadores de adelanto de fase Diseño mediante diagramas de Bode

Fernando di Sciascio

-

Compensadores de adelanto de fase

La idea general es la misma que vimos en el lugar de las raíces, ajustar la curva de fase de la planta $\measuredangle G(j\omega)$ aprovechando la característica de filtro pasa altos.

Estructura del compensador de adelanto de fase de una etapa

Es la misma estructura que vimos en diseño con el lugar de las raíces, pero se escribe un poco distinto.

$$G_{lead}^{*}(s) = K_c^{lead}\frac{(s+z_{lead})}{(s+p_{lead})} = \underbrace{K_c^{lead}\alpha_{lead}}_{K^{lead}}\underbrace{\frac{(s\,/\,z_{lead}+1)}{(s\,/\,p_{lead}+1)}}_{G_{lead}(s)} = K^{lead}G_{lead}(s)$$

$$z_{lead} < p_{lead},\;\; 0 < \alpha_{lead} = \frac{z_{lead}}{p_{lead}} < 1,\;\; K^{lead} = \alpha_{lead}K_c^{lead}$$

K_c^{lead} es la ganancia del lugar de las raíces.

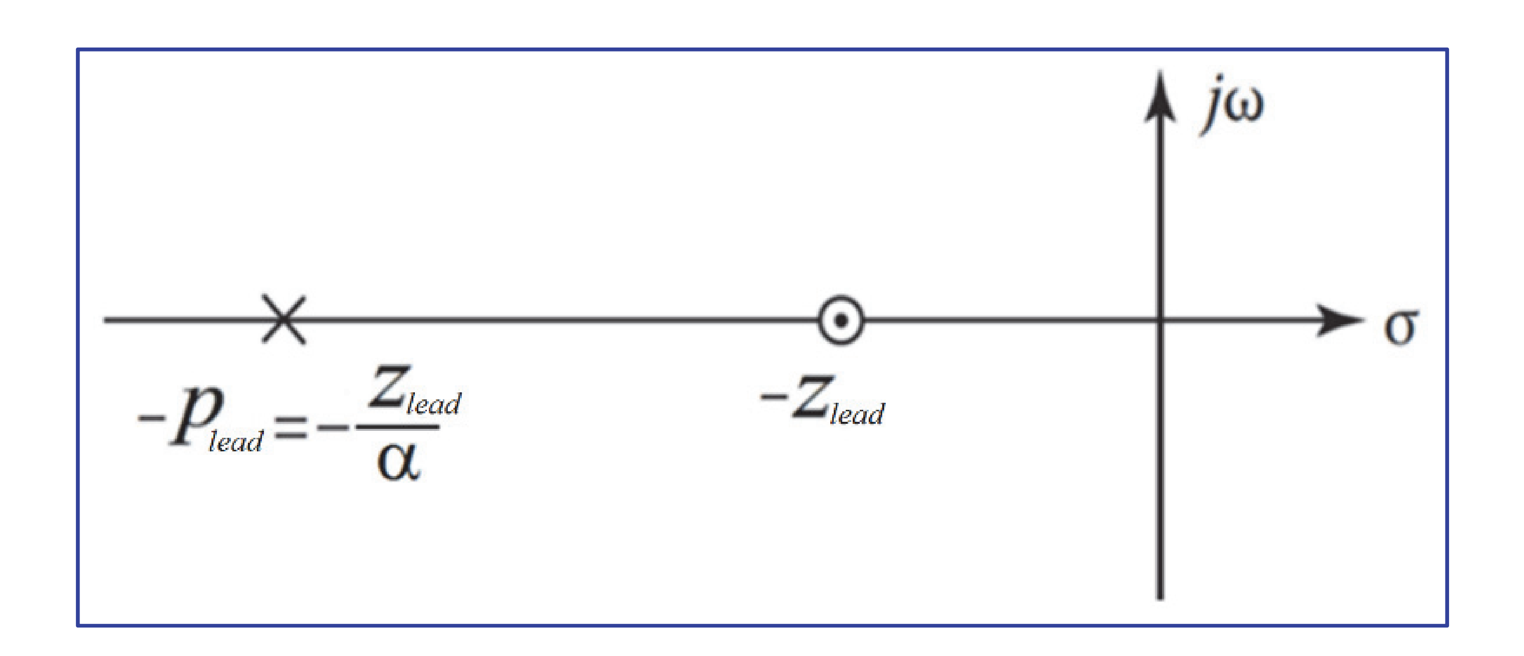
K^{lead} es la ganancia de Bode.

α_{lead} es el factor de atenuación del compensador de adelanto.

Se tienen los mismos tres parámetros de ajuste: K^{lead}, z_{lead}, p_{lead}.

$G_{lead}(s)$ (sin el asterisco) se le denomina **compensador de adelanto con ganancia estática unitaria** (Unity Static Gain Lead Compensator) ya que $G_{lead}(0)=1$.

Como vimos en el diseño con el lugar de las raíces el cero está más cerca del origen que el polo.



-

Respuesta en frecuencia de $G_{lead}(j\omega)$

Se analiza la respuesta en frecuencia de $G_{lead}(j\omega)$.

$$G_{lead}(j\omega) = \frac{j\omega \,/\, z_{lead} + 1}{j\omega \,/\, p_{lead} + 1}$$

Se utilizan los diagramas de Bode y de Nyquist.

$$\left|G_{lead}(j\omega)\right| = \left|\frac{1 + j\omega \,/\, z_{lead}}{1 + j\omega \,/\, p_{lead}}\right| = \sqrt{\frac{1 + (\omega \,/\, z_{lead})^2}{1 + (\omega \,/\, p_{lead})^2}} \Rightarrow \boxed{\left|G_{lead}(j\omega)\right| = \sqrt{\frac{1 + (\omega \,/\, z_{lead})^2}{1 + (\omega \,/\, p_{lead})^2}}}$$

$$\measuredangle G_{lead}(j\omega) = \tan^{-1}\frac{(p_{lead} - z_{lead})\omega}{z_{lead}p_{lead} + \omega^2} \Rightarrow \boxed{\measuredangle G_{lead}(j\omega) = \tan^{-1}\frac{(p_{lead} - z_{lead})\omega}{z_{lead}p_{lead} + \omega^2}}$$

estas cantidades las entrega el comando **bode** de Matlab.

```
[magnitud,fase]=bode(Glead,ω) % Devuelve la magnitud y la
                              % fase a la frecuencia ω
```

Diagrama polar o el de Nyquist

Para el diagrama polar o el de Nyquist se necesitan la parte real e imaginaria de $G_{lead}(j\omega)$ Estas cantidades las entrega el comando **freqresp** de Matlab.

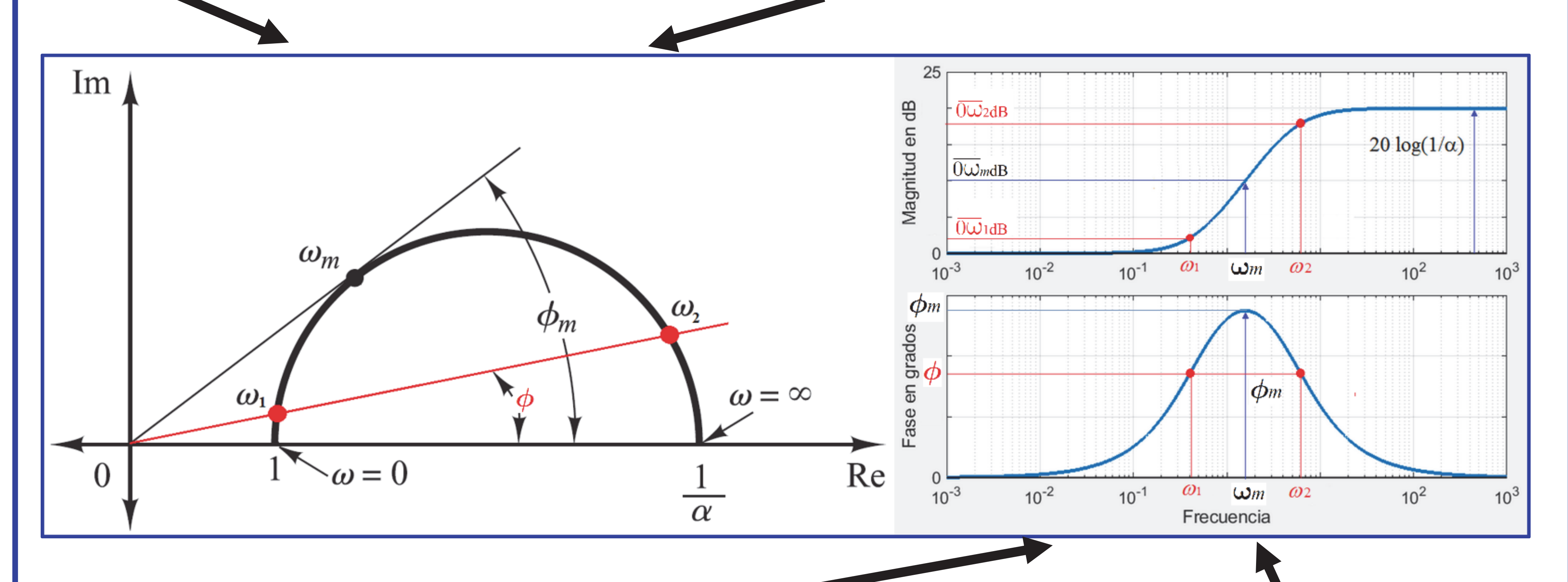
```
[real,imag] = freqresp(Glead,ω) % Devuelve la parte real y la
                                % parte imaginaria a la frecuencia
ω
```

$$\operatorname{Re}\left(G_{lead}(j\omega)\right) = \frac{z_{lead}p_{lead} + \omega^2}{z_{lead}p_{lead} + (z_{lead} / p_{lead})\omega^2} \quad , \quad \operatorname{Im}\left(G_{lead}(j\omega)\right) = \frac{\omega(p_{lead} - z_{lead})}{z_{lead}p_{lead} + (z_{lead} / p_{lead})\omega^2}$$

Los diagramas de Bode como el de Nyquist representan le respuesta en frecuencia de $G_{lead}(j\omega)$ pero de manera distinta y complementaria. Algunas características o variables del sistema que estamos analizando se visualizan mejor en un tipo de diagrama que en el otro.

Relación entre el diagrama polar y los diagramas de Bode

$$\mathrm{Re}\left(G_{lead}(j\omega)\right) = \frac{z_{lead}p_{lead} + \omega^2}{z_{lead}p_{lead} + (z_{lead} / p_{lead})\omega^2} \quad , \quad \mathrm{Im}\left(G_{lead}(j\omega)\right) = \frac{\omega\left(p_{lead} - z_{lead}\right)}{z_{lead}p_{lead} + (z_{lead} / p_{lead})\omega^2}$$



$$\left|G_{lead}(j\omega)\right| = \sqrt{\frac{1 + (\omega / z_{lead})^2}{1 + (\omega / p_{lead})^2}} \quad , \quad \measuredangle G_{lead}(j\omega) = \tan^{-1}\frac{(p_{lead} - z_{lead})\omega}{z_{lead}p_{lead} + \omega^2}$$

Propiedades de la respuesta en frecuencia de $|G_{lead}(j\omega)|$

- El valor máximo del adelanto de fase ϕ_m se produce a la frecuencia media geométrica entre el cero y el polo:

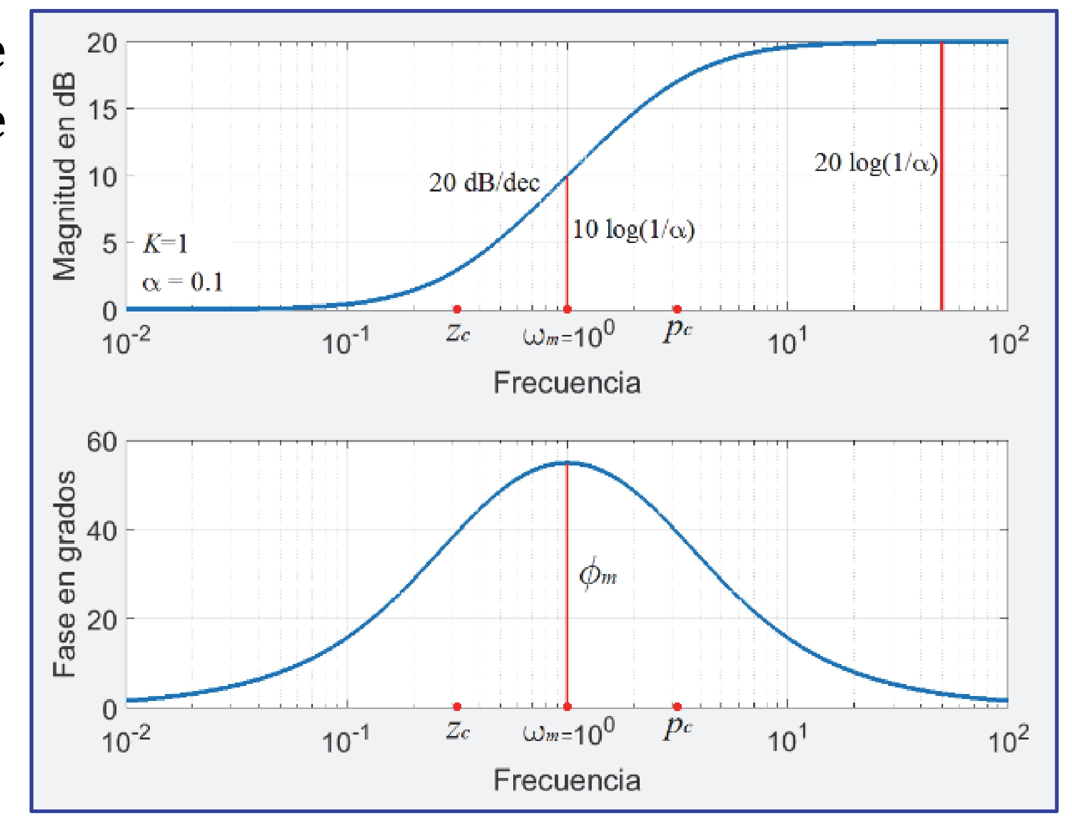
$$\omega_m = \sqrt{z_{lead}\, p_{lead}}$$

En el diagrama de Bode de la fase se observa que ω_m esta equidistante de z_{lead} y p_{lead} en escala logarítmica, luego:

$$\log(\omega_m) = \frac{\log(z_{lead}) + \log(p_{lead})}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_m = \sqrt{z_{lead}\, p_{lead}}$$



-

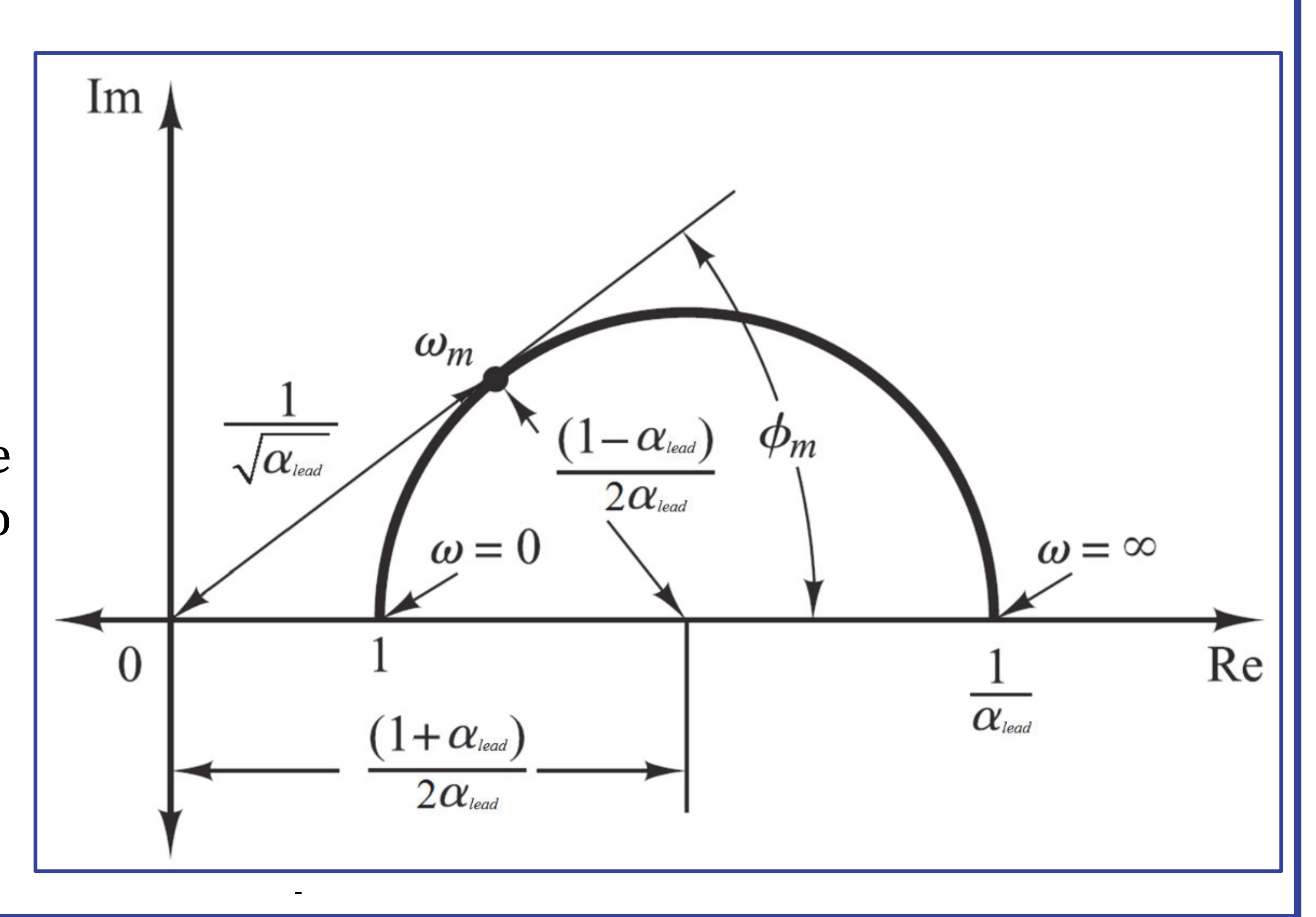
- El adelanto de fase máximo ϕ_m y $\alpha_{lead} = z_{lead} / p_{lead}$ están relacionados por:

$$\phi_m = \measuredangle G_{lead}(j\omega_m) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1-\alpha_{lead}}{1+\alpha_{lead}}\right) \Leftrightarrow \alpha_{lead} = \frac{z_{lead}}{p_{lead}} = \left(\frac{1-\text{sen}(\phi_m)}{1+\text{sen}(\phi_m)}\right), \quad 0 < \alpha_{lead} < 1$$

$$\phi_m = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1-\alpha_{lead}}{1+\alpha_{lead}}\right)$$

$$\alpha_{lead} = \left(\frac{1-\text{sen}(\phi_m)}{1+\text{sen}(\phi_m)}\right)$$

El ángulo máximo se puede encontrar analíticamente o utilizando el diagrama polar.



-

- Para $\omega = \omega_m = \sqrt{z_{lead}\, p_{lead}}$ se tiene que:

$$\left|G_{lead}(j\omega_m)\right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{lead}}}$$

$$\measuredangle G_{lead}(j\omega_m) = \phi_m = \tan^{-1}\left(\frac{(1-\alpha_{lead})}{2\sqrt{\alpha_{lead}}}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1-\alpha_{lead}}{1+\alpha_{lead}}\right)$$

$$\left|G_{lead}(j\omega_m)\right| = \sqrt{\frac{\alpha_{lead} + (\omega/\omega_m)^2}{\alpha_{lead}\left(1+\alpha_{lead}(\omega/\omega_m)^2\right)}}\Bigg|_{\omega=\omega_m} = \sqrt{\frac{\alpha_{lead}+1}{\alpha_{lead}(1+\alpha_{lead})}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{lead}}}$$

$$\left|G_{lead}(j\omega_m)\right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{lead}}} \Leftrightarrow \left|G_{lead}(j\omega_m)\right|_{\text{dB}} = 10\log\left|G_{lead}(j\omega_m)\right|^2 = 20\log\left|G_{lead}(j\omega_m)\right| = 10\log\frac{1}{\alpha_{lead}} = -10\log\alpha_{lead}$$

$$\measuredangle G_{lead}(j\omega_m) = \phi_m = \tan^{-1}\left(\frac{(1-\alpha_{lead})}{\sqrt{\alpha_{lead}}}\frac{\omega_m\omega}{(\omega_m{}^2+\omega^2)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{(1-\alpha_{lead})}{2\sqrt{\alpha_{lead}}}\right) \Rightarrow \tan(\phi_m) = \frac{(1-\alpha_{lead})}{2\sqrt{\alpha_{lead}}}$$

- De las relaciones $\alpha_{lead} = z_{lead} / p_{lead}$ y $\omega_m = \sqrt{z_{lead}\, p_{lead}}$ se tiene que:

$$\begin{cases} \alpha_{lead} = z_{lead} / p_{lead} \\ \omega_m = \sqrt{z_{lead}\, p_{lead}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} z_{lead} = \sqrt{\alpha_{lead}}\, \omega_m \\ p_{lead} = \omega_m / \sqrt{\alpha_{lead}} \end{array}$$

Reemplazando $z_{lead} = \sqrt{\alpha_{lead}}\, \omega_m$ y $p_{lead} = \omega_m / \sqrt{\alpha_{lead}}$ en las expresiones de la magnitud y la fase de $G_{lead}(j\omega)$

$$G_{lead}(j\omega) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\sqrt{\alpha_{lead}} + j(\omega / \omega_m)}{1 / \sqrt{\alpha_{lead}} + j(\omega / \omega_m)} \right)$$

$$\omega_m = \sqrt{z_{lead}\, p_{lead}}, \quad \alpha_{lead} = z_{lead} / p_{lead}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left| G_{lead}(j\omega) \right| = \sqrt{\dfrac{\alpha_{lead} + \left(\omega / \omega_m\right)^2}{\alpha_{lead}\left(1 + \alpha_{lead}\left(\omega / \omega_m\right)^2\right)}} \\ \measuredangle G_{lead}(j\omega) = \tan^{-1}\left(\dfrac{(1 - \alpha_{lead})}{\sqrt{\alpha_{lead}}} \dfrac{\omega_m \omega}{(\omega_m{}^2 + \omega^2)} \right) \end{cases}$$

-

- Para $\omega = 0$ se tiene que:

$$\left|G_{lead}(0)\right| = \sqrt{\frac{\alpha_{lead} + \left(\omega / \omega_m\right)^2}{\alpha_{lead}\left(1 + \alpha_{lead}\left(\omega / \omega_m\right)^2\right)}}\Bigg|_{\omega=0} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|G_{lead}(0)\right|_{\mathrm{dB}} = 0\,\mathrm{dB}$$

$$\measuredangle G_{lead}(0) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\alpha_{lead}}{\sqrt{\alpha_{lead}}}\right)\left(\frac{\omega_m \omega}{\omega_m{}^2 + \omega^2}\right)\Bigg|_{\omega=0} = 0^{\mathrm{o}}$$

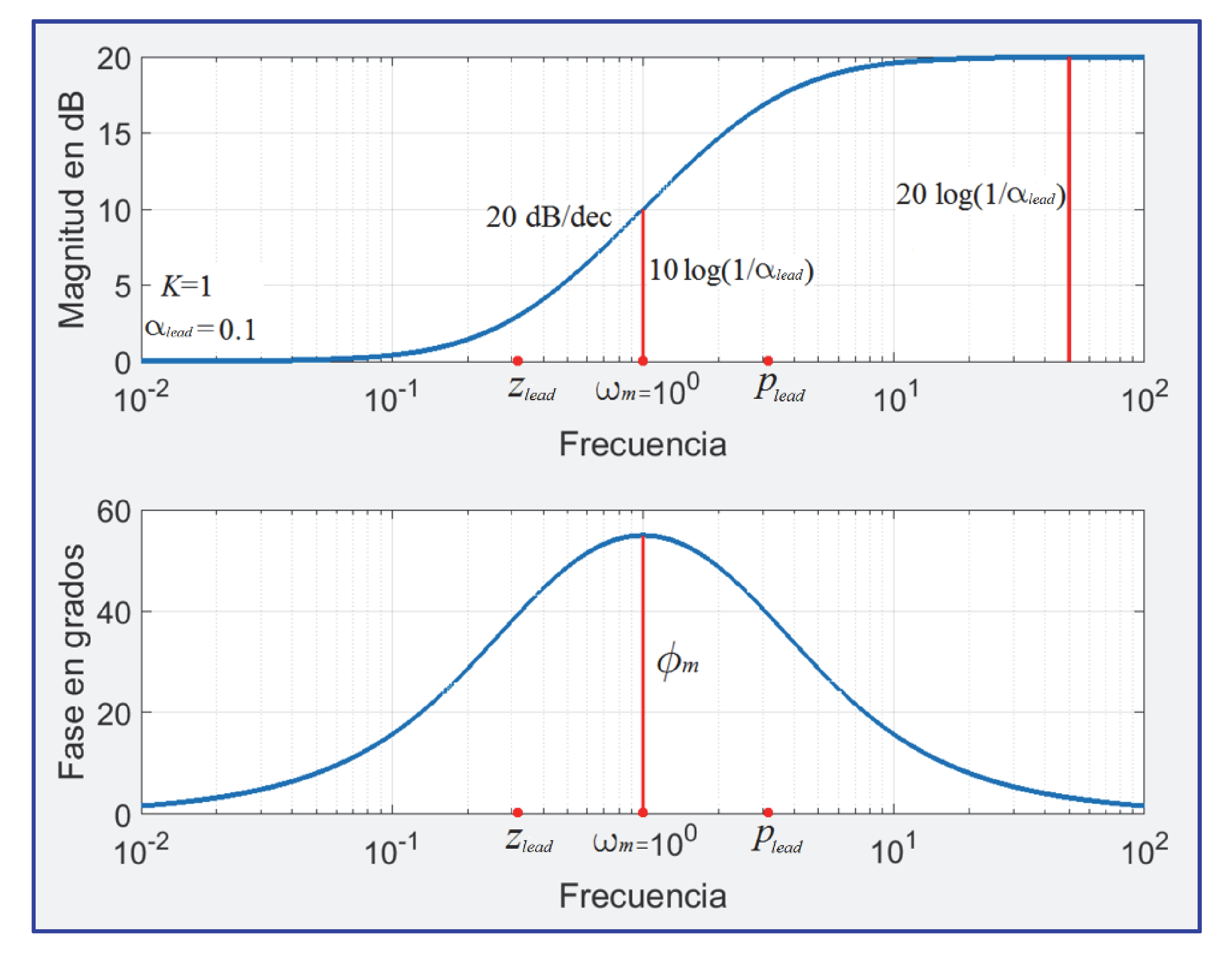
- Para $\omega \longrightarrow \infty$ se tiene que:

$$\left|G_{lead}(\infty)\right| = \lim_{\omega\to\infty}\left|\frac{(1+j\omega T)}{(1+j\omega\alpha T)}\right| = \frac{1}{\alpha_{lead}} \Rightarrow \lim_{\omega\to\infty}\left|G_{lead}(j\omega)\right|_{\mathrm{dB}} = \lim_{\omega\to\infty} 20\log\left|G_{lead}(j\omega_m)\right| = 20\log\frac{1}{\alpha_{lead}}$$

$$\measuredangle G_{lead}(\infty) = \lim_{\omega\to\infty}\tan^{-1}\left(\frac{(1-\alpha_{lead})}{\sqrt{\alpha_{lead}}}\frac{\omega_m \omega}{(\omega_m{}^2 + \omega^2)}\right) = 0^{\mathrm{o}}$$

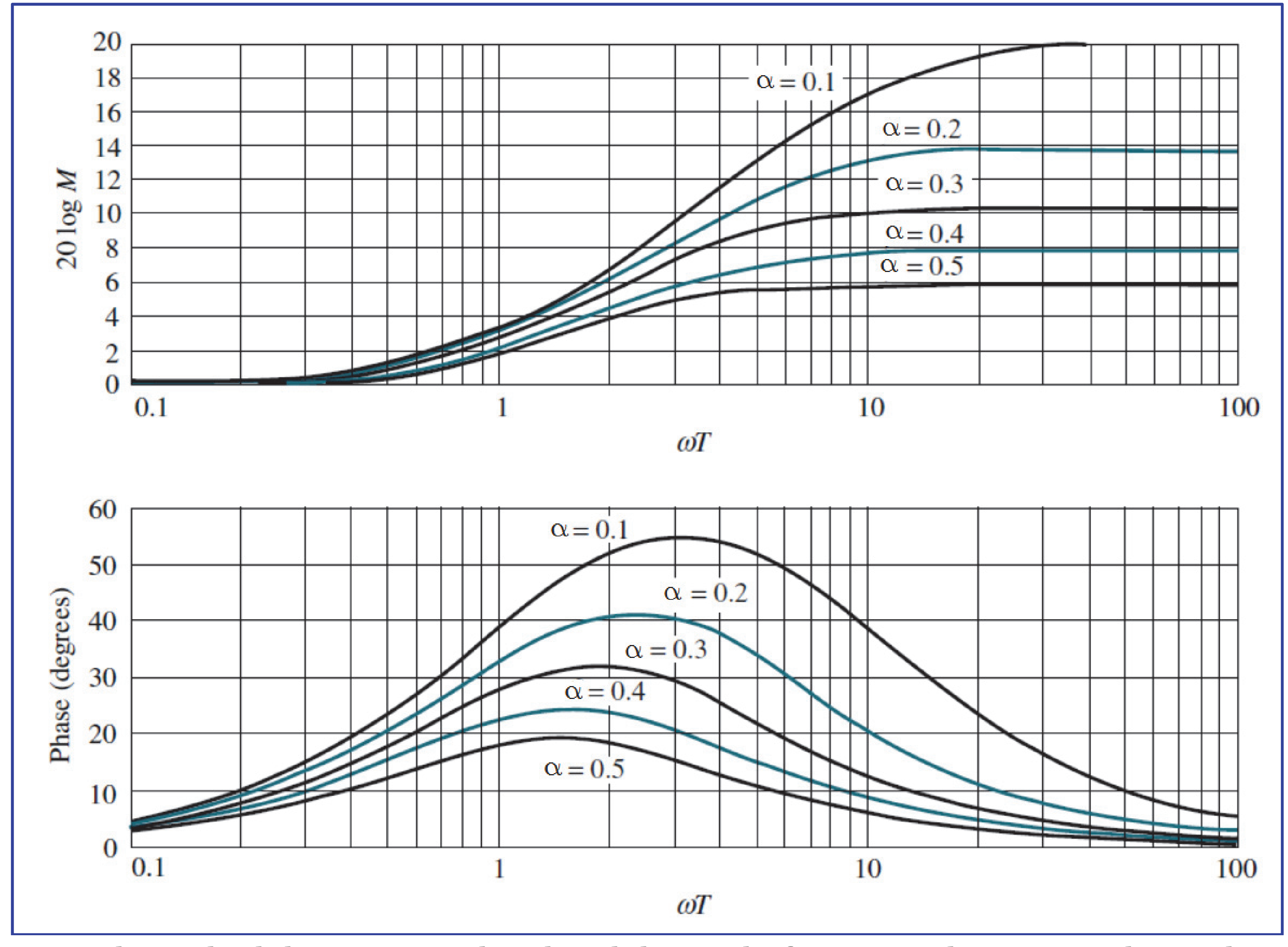
-

Con las propiedades vistas se construye los diagramas de Bode de la respuesta en frecuencia:



Diagramas de Bode del compensador de adelanto de fase

-

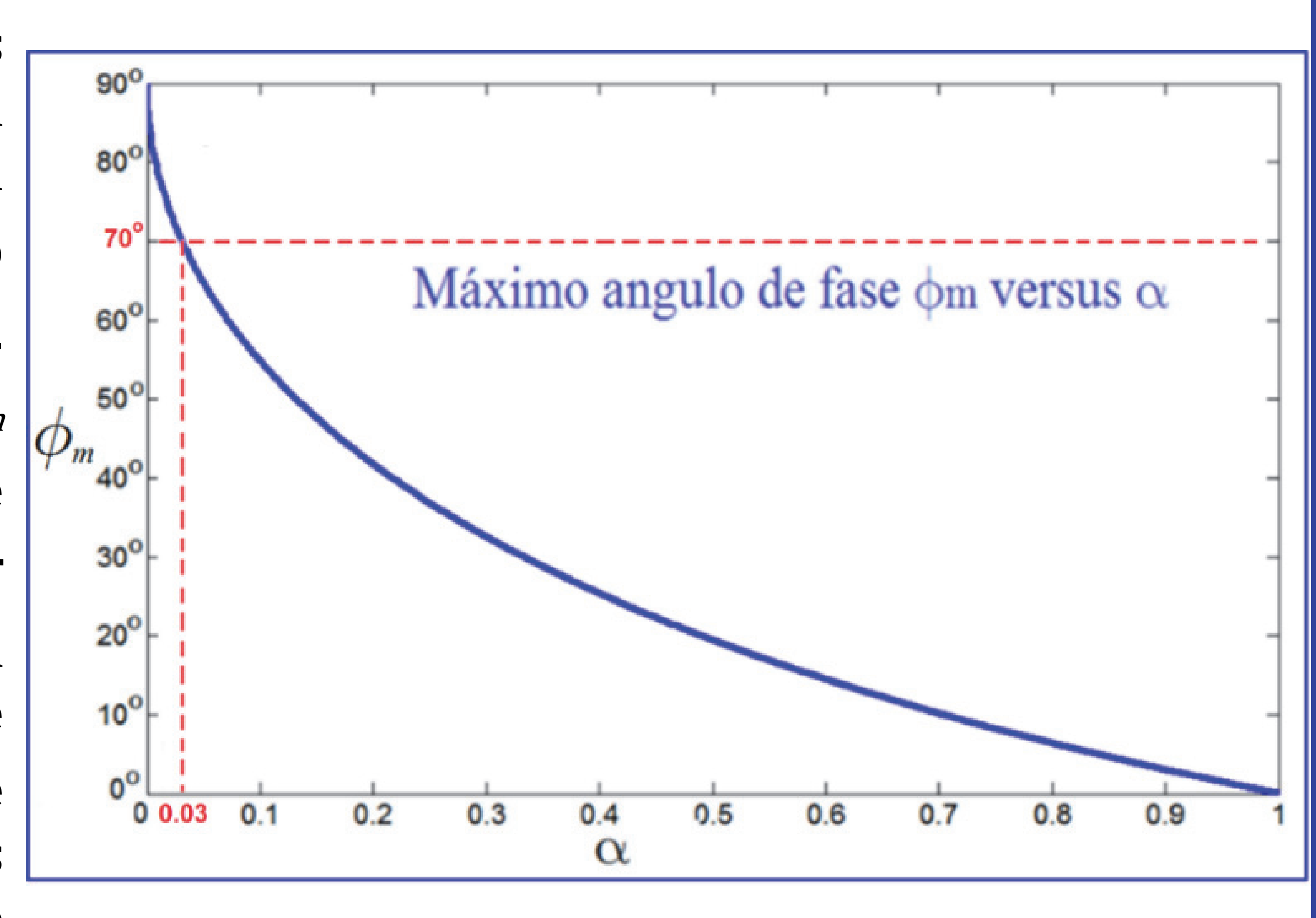


Diagramas de Bode del compensador de adelanto de fase para distintos valores de $\alpha=\alpha_{lead}$

-

El aumento de ganancia de alta frecuencia es inversamente proporcional a $\alpha_{lead} = z_{lead} / p_{lead}$. Por lo tanto, existe un compromiso entre querer agregar una gran cantidad de fase (α_{lead} pequeña) y la tendencia a generar grandes ganancias a alta frecuencia que amplifican el ruido y las perturbaciones.

Por consideraciones practicas a la hora de implementar el controlador, el valor del incremento de fase ϕ_m no debe superar 70º (ver figura). El límite máximo de ϕ_m impone que $\alpha_{lead} \geq 0.03$, lo que significa que $p_{lead} \leq 35\, z_{lead}$. Por ello los límites admisibles son $0.03 \leq \alpha_{lead} < 1$ y $\phi_m \leq 70^o$. Si se necesita más adelanto de fase se deben utilizarse dos o más etapas de compensadores de adelanto de fase.



-

Compensador de adelanto de fase

Respuesta en frecuencia

$$G_{lead}(j\omega) = \frac{1}{\alpha_{lead}}\left(\frac{\sqrt{\alpha_{lead}} + j(\omega/\omega_m)}{1/\sqrt{\alpha_{lead}} + j(\omega/\omega_m)}\right)$$

$$\omega_m = \sqrt{z_{lead}\, p_{lead}}\,,\quad \alpha_{lead} = z_{lead}/p_{lead}$$

$$\left|G_{lead}(j\omega)\right| = \sqrt{\frac{\alpha_{lead} + (\omega/\omega_m)^2}{\alpha_{lead}\left(1 + \alpha_{lead}(\omega/\omega_m)^2\right)}}$$

$$\measuredangle G_{lead}(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{(1-\alpha_{lead})}{\sqrt{\alpha_{lead}}}\frac{\omega_m\omega}{(\omega_m^{\,2} + \omega^2)}\right)$$

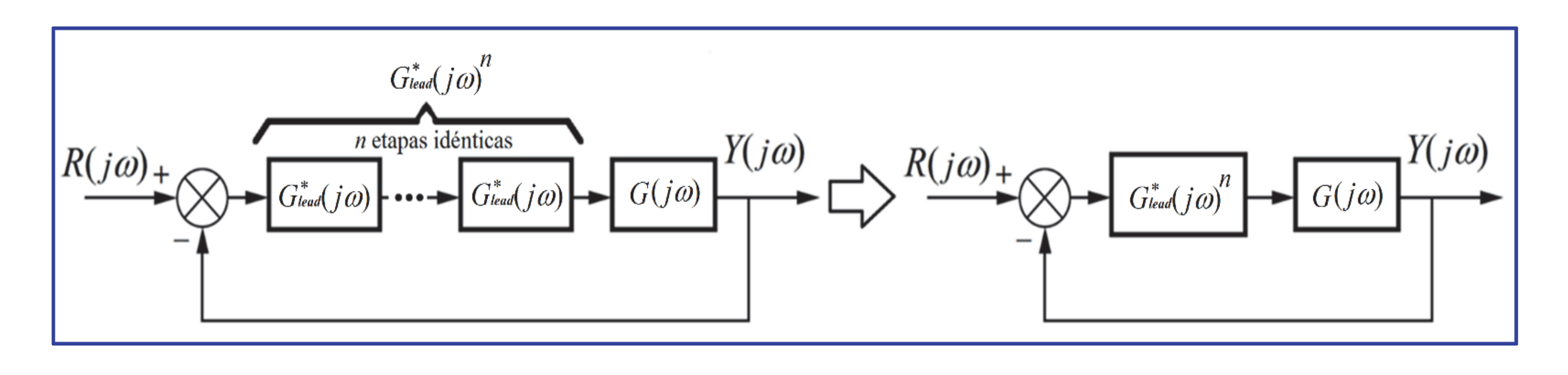
Módulo	$\left\|G_{lead}(0)\right\| = 1$ $\left\|G_{lead}(0)\right\|_{\mathrm{dB}} = 0$	$\left\|G_{lead}(j\omega_m)\right\| = 1/\sqrt{\alpha_{lead}}$ $\left\|G_{lead}(j\omega_m)\right\|_{\mathrm{dB}} = 10\log(1/\alpha_{lead})$	$\left\|G_{lead}(\infty)\right\| = 1/\alpha_{lead}$ $\left\|G_{lead}(\infty)\right\|_{\mathrm{dB}} = 20\log(1/\alpha_{lead})$
Fase	$\measuredangle G_{lead}(j\omega) = 0$	$\measuredangle G_{lead}(j\omega_m) = \phi_m = \mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{1-\alpha_{lead}}{1+\alpha_{lead}}\right)$	$\measuredangle G_{lead}(\infty) = 0$

-

Compensador de adelanto de fase de n etapas

Normalmente para plantas con varios polos o con retardo o tiempo muerto, el adelanto de fase necesario del compensador Φ_m es bastante mayor que 70°. Por lo tanto, serán necesarias varias etapas de adelanto para poder. Entonces, Φ_m es el valor máximo del adelanto de fase del compensador de n etapas idénticas que se produce también a la frecuencia $\omega_m = \sqrt{z_{lead}\, p_{lead}}$. Si ϕ_m es el valor máximo del adelanto de fase de cada etapa (obviamente para un compensador de una etapa $\Phi_m = \phi_m$), entonces:

$$\Phi_m = \measuredangle G_{lead}(j\omega_m) = n\,\phi_m = n\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{1-\alpha_{lead}}{1+\alpha_{lead}}\right)$$



-

Estructura del compensador de adelanto de fase de n etapas

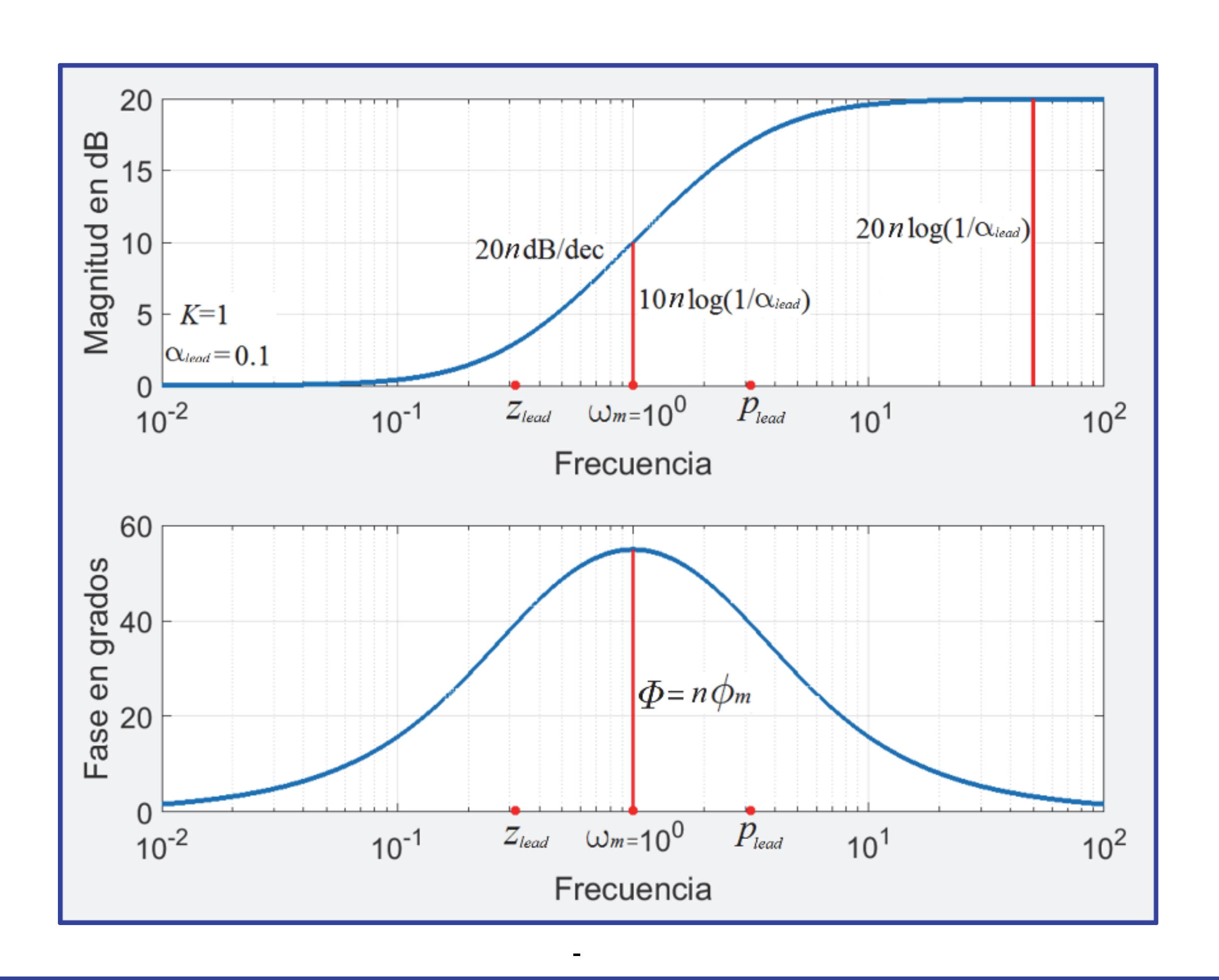
$$G_{lead}^{*}(s) = K_c^{lead} \frac{(s + z_{lead})^n}{(s + p_{lead})^n} = \underbrace{K_c^{lead} \underbrace{\left(\frac{z_{lead}}{p_{lead}}\right)^n}_{\alpha_{lead}{}^n}}_{K^{lead} = \alpha_{lead}{}^n K_c^{lead}} \underbrace{\frac{(s / z_{lead} + 1)^n}{(s / p_{lead} + 1)^n}}_{G_{lead}(s)} = K^{lead} \; G_{lead}(s)$$

$$\alpha_{lead} = \frac{z_{lead}}{p_{lead}} < 1$$

$$G_{lead}(s) = \frac{(s / z_{lead} + 1)^n}{(s / p_{lead} + 1)^n} = \frac{1}{\alpha_{lead}{}^n} \frac{(s + z_{lead})^n}{(s + p_{lead})^n}$$

Se tienen cuatro parámetros de ajuste: K^{lead}, z_{lead}, p_{lead} y n.

Como se vio en el diseño con el lugar de las raíces en una red de adelanto el o los ceros múltiples están más cerca del origen que el o los polos múltiples. La respuesta en frecuencia del compensador de adelanto de fase de n etapas es sencilla de calcular, ya que las n etapas están conectadas en serie o cascada, entonces la magnitud será el producto de las n magnitudes (o la sumatoria cuando se expresa en dB) de cada etapa y la fase será n veces la fase de cada etapa individual.



-

Compensador de adelanto de fase de n etapas

Respuesta en frecuencia

$$G_{lead}(j\omega) = \frac{1}{\alpha_{lead}{}^{n}} \frac{\left(\sqrt{\alpha_{lead}} + j(\omega / \omega_m)\right)^n}{\left(1 / \sqrt{\alpha_{lead}} + j(\omega / \omega_m)\right)^n} \begin{cases} \left|G_{lead}(j\omega)\right| = \left(\dfrac{\alpha_{lead} + (\omega / \omega_m)^2}{\alpha_{lead}\left(1 + \alpha_{lead}(\omega / \omega_m)^2\right)}\right)^{n/2} \\ \measuredangle G_{lead}(j\omega) = n \tan^{-1}\left(\dfrac{(1 - \alpha_{lead})}{\sqrt{\alpha_{lead}}} \dfrac{\omega_m \omega}{(\omega_m{}^2 + \omega^2)}\right) \end{cases}$$

$$\omega_m = \sqrt{z_{lead}\, p_{lead}}\,,\ \alpha_{lead} = z_{lead} / p_{lead}$$

Módulo	$\left\|G_{lead}(0)\right\| = 1$ $\left\|G_{lead}(0)\right\|_{\text{dB}} = 0$	$\left\|G_{lead}(j\omega_m)\right\| = \dfrac{1}{\alpha_{lead}{}^{n/2}}$ $\left\|G_{lead}(j\omega_m)\right\|_{\text{dB}} = 10n \log\left(\dfrac{1}{\alpha_{lead}}\right)$	$\left\|G_{lead}(\infty)\right\| = \dfrac{1}{\alpha_{lead}{}^{n}}$ $\left\|G_{lead}(\infty)\right\|_{\text{dB}} = 20\, n \log\left(\dfrac{1}{\alpha_{lead}}\right)$
Fase	$\measuredangle G_{lead}(j\omega) = 0$	$\measuredangle G_{lead}(j\omega_m) = \Phi_m = n\phi_m$ $= n \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{1 - \alpha_{lead}}{1 + \alpha_{lead}}\right)$	$\measuredangle G_{lead}(\infty) = 0$

El valor máximo del adelanto de fase Φ_m coincide con la de cada etapa ϕ_m y se produce a la frecuencia $\omega_m = \sqrt{z_{lead}\, p_{lead}}$. Como vimos, para cada etapa $0 < \alpha_{lead} = z_{lead} / p_{lead} < 1$ y ϕ_m están relacionados por:

$$\phi_m = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1-\alpha_{lead}}{1+\alpha_{lead}}\right) \Leftrightarrow \alpha_{lead} = \frac{1-\text{sen}(\phi_m)}{1+\text{sen}(\phi_m)}$$

El adelanto de fase máximo que entrega el compensador es:

$$\Phi_m = \measuredangle G_{lead}(j\omega_m) = n\,\phi_m = n\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{1-\alpha_{lead}}{1+\alpha_{lead}}\right)$$



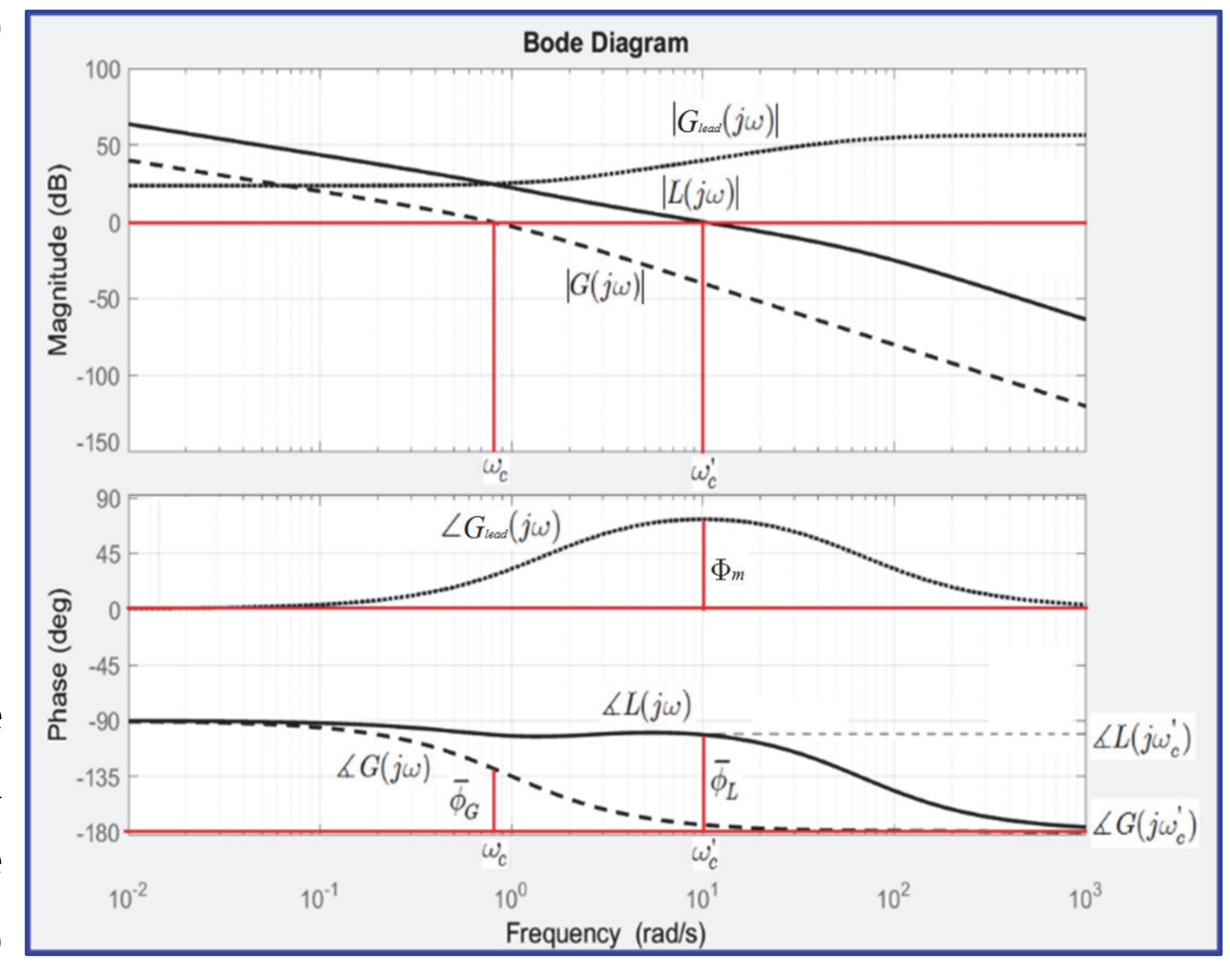
Mecanismo de compensación por adelanto de fase

La frecuencia de cruce por 0 dB de $G(j\omega)$ es ω_c:

$$|G(j\omega_c)|_{\text{dB}} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$|G(j\omega_c)| = 1$$

El margen de fase $\bar{\phi}_G$ de $G(j\omega)$ a la frecuencia de cruce ω_c es:

$$\bar{\phi}_G = \pi + \measuredangle G(j\omega_c)$$



Se incrementa el margen de fase $\bar{\phi}_G$ de la planta sin compensar a $\bar{\phi}_L$ el margen de fase del sistema compensado $L(j\omega) = G^*_{lead}(j\omega)G(j\omega)$ y se incrementa la frecuencia de cruce por 0 dB de $L(j\omega)$ a $\omega_c' > \omega_c$.

$$\left|L(j\omega_c')\right| = 1, \; \bar{\phi}_L = \pi + \measuredangle L(j\omega_c')$$

-

Distintos diseños de compensadores de adelanto de fase

Vimos en el diseño mediante el Lugar de las Raíces que las redes simples como la de adelanto de fase no pueden satisfacer simultáneamente las tres especificaciones clásicas: K_n (ganancia estática del error), estabilidad (en este caso con el margen de fase $\bar{\phi}_L$) y velocidad (en este caso con $\omega_c' = \omega_c^L$, la frecuencia de cruce de ganancia).

Solo pueden satisfacer dos de ellas quedando la tercera fijada en un valor que no se puede ajustar. Se tiene entonces tres posibilidades de diseño de redes de adelanto según el par de especificaciones que se consideren:

1) Diseño lead o lead1: En este diseño las especificaciones son $\bar{\phi}_L$ y $\omega_c' = \omega_c^L$ (no se tiene control sobre el valor que toma K_n).

2) Diseño lead2: En este diseño las especificaciones son $\bar{\phi}_L$ y K_n (no se tiene control sobre el valor que toma $\omega_c' = \omega_c^L$).

3) Diseño lead3: En este diseño las especificaciones son $\omega_c' = \omega_c^L$ y K_n (no se tiene control sobre el valor que toma $\bar{\phi}_L$).

Nomenclatura del compensador de adelanto de fase

$$G^*_{lead}(s) = K_c^{lead}\frac{(s+z_{lead})^n}{(s+p_{lead})^n} = \underbrace{K_c^{lead}\underbrace{\left(\frac{z_{lead}}{p_{lead}}\right)^n}_{\alpha_{lead}{}^n}}_{K^{lead}=\alpha_{lead}{}^n K_c^{lead}}\underbrace{\frac{(s\,/\,z_{lead}+1)^n}{(s\,/\,p_{lead}+1)^n}}_{G_{lead}(s)} = K^{lead}\;G_{lead}(s)$$

Diseño	Especificaciones	Observación
Compensador de adelanto de fase **lead o lead1** $G_{lead}(j\omega) = \texttt{lead1}(G(j\omega),\bar{\phi}_L,\omega_c^{'})$	$\bar{\phi}_L\ ,\ \omega_c^{'}$	No se tiene control sobre el valor final de la ganancia de Bode K^{lead} la cual puede satisfacer o no K_n .
Compensador de adelanto de fase **lead2** $G_{lead}(j\omega) = \texttt{lead2}(G(j\omega),K_n,\bar{\phi}_L)$	$K_n\ ,\ \bar{\phi}_L$	No se tiene control sobre el valor final de $\omega_c^{'}$ la cual es mayor que la del sistema sin compensar ω_c .
Compensador de adelanto de fase **lead3** $G_{lead}(j\omega) = \texttt{lead3}(G(j\omega),K_n,\omega_c^{'})$	$K_n\ ,\ \omega_c^{'}$	No se tiene control sobre el valor final de $\bar{\phi}_L$ que es menor que el del sistema sin compensar $\bar{\phi}_G$.

Diseño de compensadores de adelanto de fase (lead o lead1)

Este diseño es el principal y característico de una red de adelanto de fase, su propósito es satisfacer las especificaciones dinámicas, esto es, el margen de fase $\bar{\phi}_L$ (estabilidad relativa) y la frecuencia de cruce de ganancia $\omega_c' = \omega_c^L$ (velocidad de la respuesta). No se tiene control sobre el valor que toma la ganancia estática del error K_n.

La idea general de este compensador de adelanto de fase es ajustar la curva de fase de la planta. Esto se hace aprovechando la propiedad de adicionar fase positiva para establecer el margen de fase requerido $\bar{\phi}_L$ en la frecuencia de cruce de ganancia especificada ω_c'.

El diseño es básicamente un método analítico completamente análogo al diseño con el lugar de las raíces. Como puede obtenerse las posiciones de los polos complejos conjugados deseados, el diseño puede realizarse con las mismas especificaciones temporales que vimos en el diseño con el lugar de las raíces convirtiéndolas a $\bar{\phi}_L$ y ω_c'.

Las especificaciones que se dan son las dinámicas de estabilidad y velocidad y ninguna de precisión en el estado estacionario ya que no la podemos cumplir con el diseño.

- **Paso 0)** (Obtención de $\bar{\phi}_L$ y $\omega_c' = \omega_c^L$):

Existen varias especificaciones de estabilidad y de velocidad tanto en el dominio de la frecuencia como del tiempo. Por lo tanto, antes de comenzar el diseño se debe convertir las especificaciones a margen de fase $\bar{\phi}_L$ y frecuencia de cruce de ganancia ω_c'. Esta conversión se puede hacer de manera directa cuando se conocen las fórmulas o mediante los gráficos que vimos anteriormente.

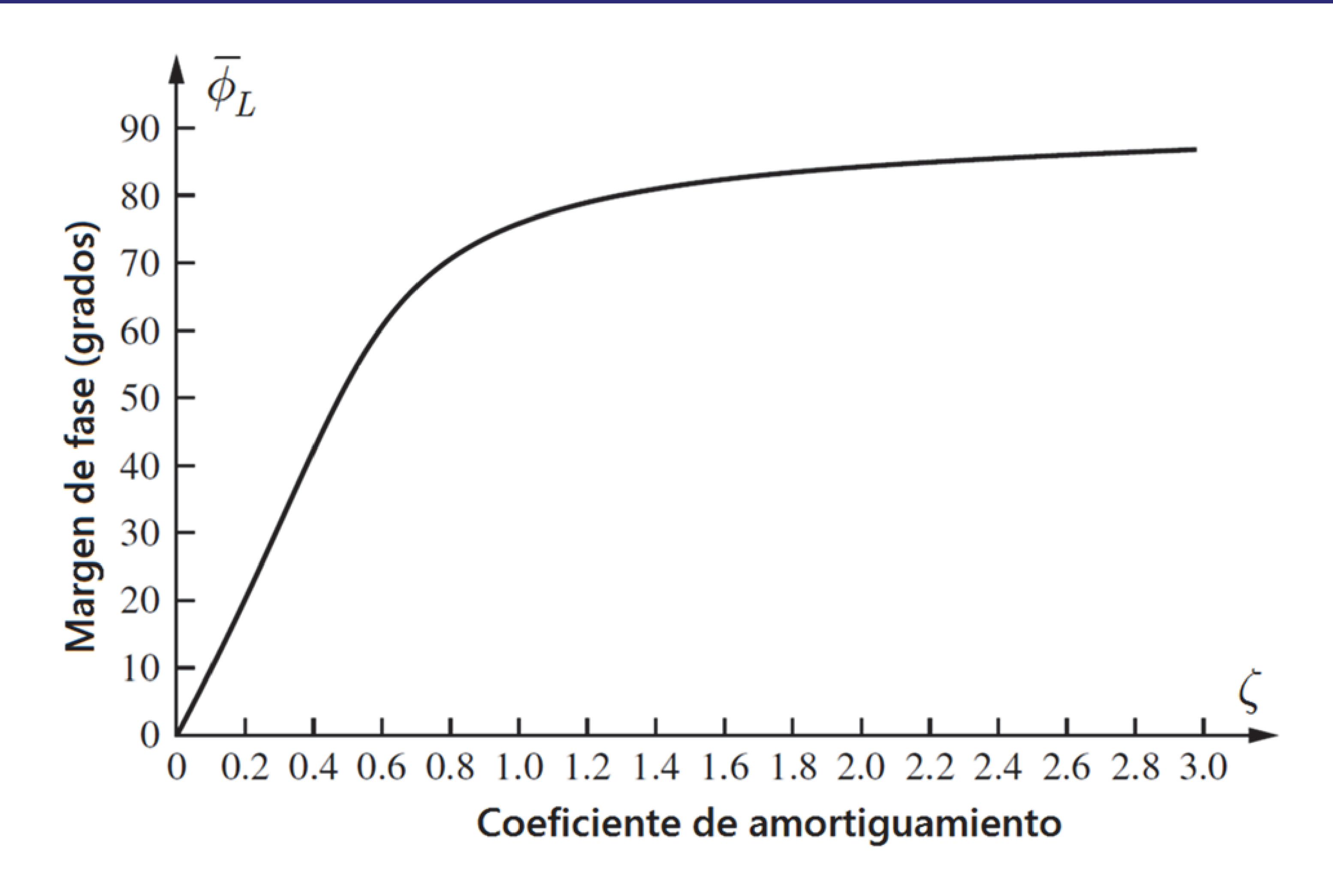
Si las especificaciones están dadas en el dominio temporal, por ejemplo, $\%Os$ y T_s, con ζ y ω_n se obtienen las especificaciones en frecuencia con las fórmulas vistas anteriormente, por ejemplo, $\bar{\phi}_L$ y ω_c'.

$$\left.\begin{matrix} \%Os \\ \\ T_s, T_r, T_p \end{matrix}\right\} \rightleftarrows \zeta, \omega_n \rightleftarrows \left\{\begin{matrix} \bar{\phi}_L,\ s_n, M_p \\ \\ \omega_{BW},\ \omega_c',\ \omega_p \end{matrix}\right.$$

-

- Con ζ se calcula el margen de fase $\bar{\phi}_L$.

$$\bar{\phi}_L = \tan^{-1}\left(2\sqrt{2\zeta^4+\zeta^2\sqrt{4\zeta^4+1}}\right) = \tan^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{(4\zeta^4+1)}-2\zeta^2}} \approx \begin{cases} 100\zeta & \text{para} \quad 0 \le \zeta \le 0.6 \\ 45\zeta + 33 & \text{para} \quad 0.6 \le \zeta \le 1 \end{cases}$$



- Con ζ y ω_n se calcula ω_c' la frecuencia de cruce por 0 dB de $L(j\omega)$.

$$\omega_c' = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}$$

Observación: Otra alternativa es dar las especificaciones dinámicas indirectamente mediante el modelo de segundo orden o prototipo para el comportamiento dinámico deseado.

$$G_d(s) = \frac{\omega_n^{\,2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\,2}} \Rightarrow \zeta,\ \omega_n \Rightarrow \begin{cases} \bar{\phi}_L = \tan^{-1} \dfrac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{(4\zeta^4 + 1)} - 2\zeta^2}} \\ \omega_c' = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2} \end{cases}$$

Diseño gráfico y analítico:

Datos:

La planta: $G(j\omega)$ o los diagramas de Bode $|G(j\omega)|$ y $\measuredangle G(j\omega)$

Especificaciones

Margen de fase $\bar{\phi}_L$

Frecuencia de cruce de ganancia $\omega_c' = \omega_c^L$

Observación: Durante el diseño se necesita conocer la magnitud y la fase de $G(j\omega)$ en la frecuencia de cruce de ganancia ω_c' ,esto es, $|G(j\omega_c')|$ y $\measuredangle G(j\omega_c')$. Si conocemos la función de transferencia $G(j\omega)$ calculamos estas cantidades directamente utilizando el comando **bode**.

```
[modulo_de_G_en_wc_L,fase_de_G_en_wc_L]=bode(G,wc_L)
% Devuelve magnitud y fase de G(jw) en w=w_L
```

Si solamente disponemos de los diagramas de bode obtenemos $|G(j\omega_c')|$ y $\measuredangle G(j\omega_c')$ directamente de los gráficos.

- **Paso 1)** Se determina $\Phi_m = \measuredangle G_{lead}(j\omega_c^{'})$, el máximo adelanto de fase que debe entregar la red y se fuerza a que la fase Φ_m se entregue a la frecuencia ω_m que coincide con la frecuencia de cruce de ganancia $\omega_m = \omega_c^{'} = \sqrt{z_{lead}\, p_{lead}}$. **De esta manera se obtiene el margen de fase deseado $\bar{\phi}_L$ con el compensador más pequeño posible.**

El ángulo Φ_m se obtiene a partir de la definición del margen de fase $\bar{\phi}_L$:

$$\bar{\phi}_L = \pi + \underbrace{\measuredangle L(j\omega_c^{'})}_{\measuredangle G_c(j\omega_c^{'})+\measuredangle G(j\omega_c^{'})} = \pi + \underbrace{\measuredangle G_{lead}(j\omega_c^{'})}_{\Phi_m} + \measuredangle G(j\omega_c^{'}) = \pi + \Phi_m + \measuredangle G(j\omega_c^{'})$$

$$\boxed{\Phi_m = \bar{\phi}_L - \pi - \measuredangle G(j\omega_c^{'})}$$

- **Paso 2)** Se determina el número de etapas necesarias n.

Por consideraciones prácticas de implementación del controlador, el valor del incremento de fase máxima Φ_m no debe superar 70º. Si $\Phi_m > 70^o$ se deberá utilizar dos o más etapas de adelanto de fase.

$$n = \uparrow\left(\frac{\Phi_m}{70^o}\right)$$

Donde el símbolo $\uparrow$ indica la operación redondear hacia arriba (rounding up).

- **Paso 3)** Se calcula el máximo adelanto de fase por etapa:

$$\phi_m = \frac{\Phi_m}{n}$$

Para $\Phi_m < 70^o$, $n = 1$ y obviamente esa única etapa aporta $\phi_m = \Phi_m$.

- **Paso 4)** Se calcula el coeficiente de atenuación $\alpha_{lead} = z_{lead} / p_{lead} < 1$ de cada etapa.

$$\alpha_{lead} = \frac{z_{lead}}{p_{lead}} = \frac{1 - \mathrm{sen}(\phi_m)}{1 + \mathrm{sen}(\phi_m)}$$

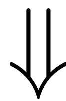
- **Paso 5)** Se calculan las posiciones del cero z_{lead} y el polo p_{lead} de cada etapa del compensador con el par de ecuaciones $\alpha_{lead} = z_{lead} / p_{lead}$ y $\omega_c' = \sqrt{z_{lead}\, p_{lead}}$.

$$\begin{cases} z_{lead}\, p_{lead} = \omega_c'^{\,2} \\ \dfrac{z_{lead}}{p_{lead}} = \alpha_{lead} \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_{lead} = \omega_c' \sqrt{\alpha_{lead}}}, \quad \boxed{p_{lead} = \omega_c' / \sqrt{\alpha_{lead}}}$$

-

- **Paso 6)** Se calcula la ganancia de Bode del compensador K^{lead} que ya está fijada y se obtiene de la condición $\left|L(j\omega_c^{'})\right| = 1$.

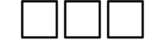
$$\left|L(j\omega_c^{'})\right| = K^{lead}\underbrace{\left|G_{lead}(j\omega_c^{'})\right|}_{1/\alpha_{lead}{}^{n/2}}\left|G(j\omega_c^{'})\right| = 1$$



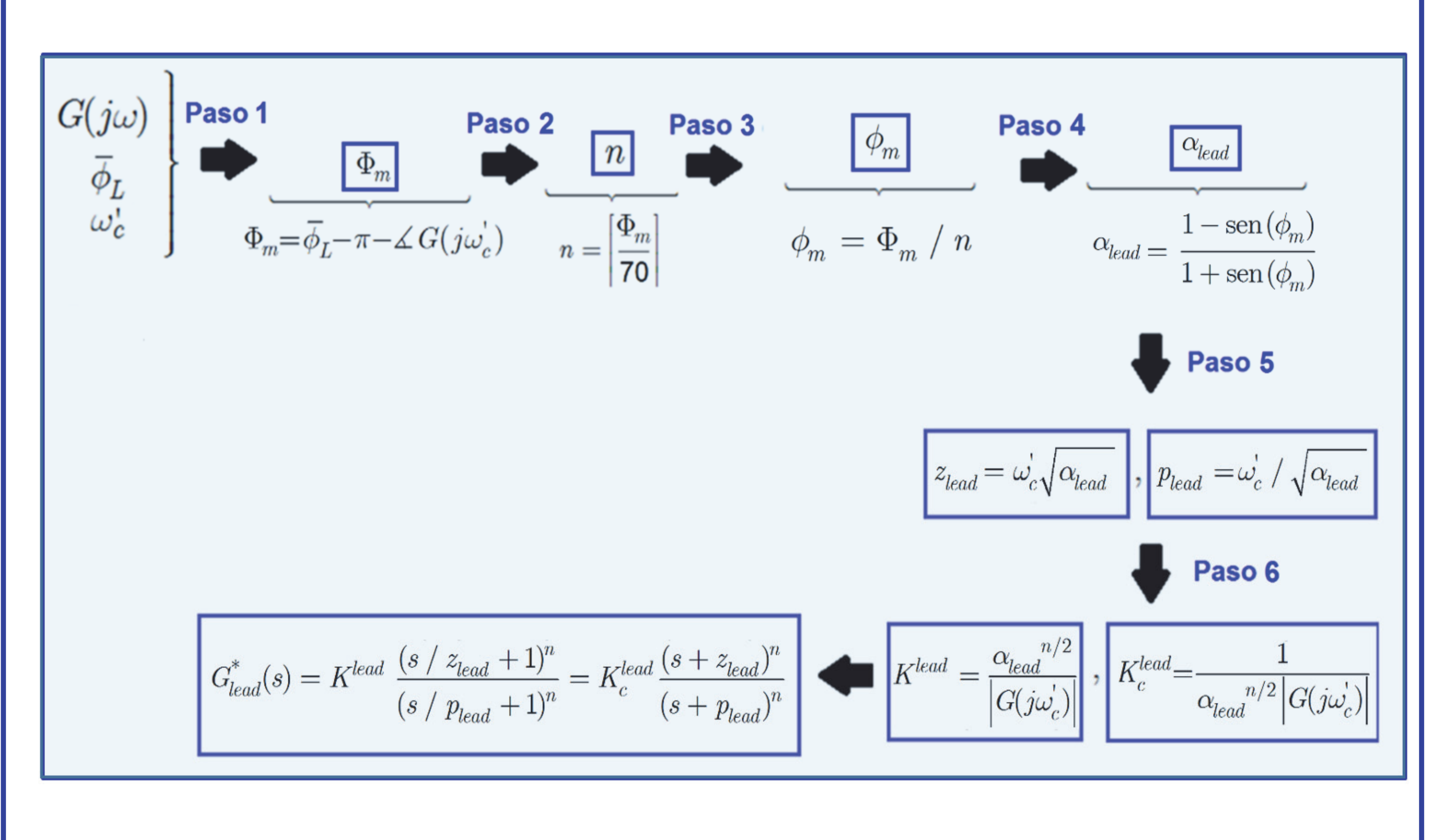
$$K^{lead} = \frac{\alpha_{lead}{}^{n/2}}{\left|G(j\omega_c^{'})\right|} \quad , \quad K_c^{lead} = \frac{K^{lead}}{\alpha_{lead}{}^{n}} = \frac{1}{\alpha_{lead}{}^{n/2}\left|G(j\omega_c^{'})\right|}$$

El compensador de adelanto de fase de n etapas completo es entonces:

$$G_{lead}^{*}(s) = K^{lead}\,\frac{(s\,/\,z_{lead}+1)^n}{(s\,/\,p_{lead}+1)^n} = K_c^{lead}\,\frac{(s+z_{lead})^n}{(s+p_{lead})^n}$$

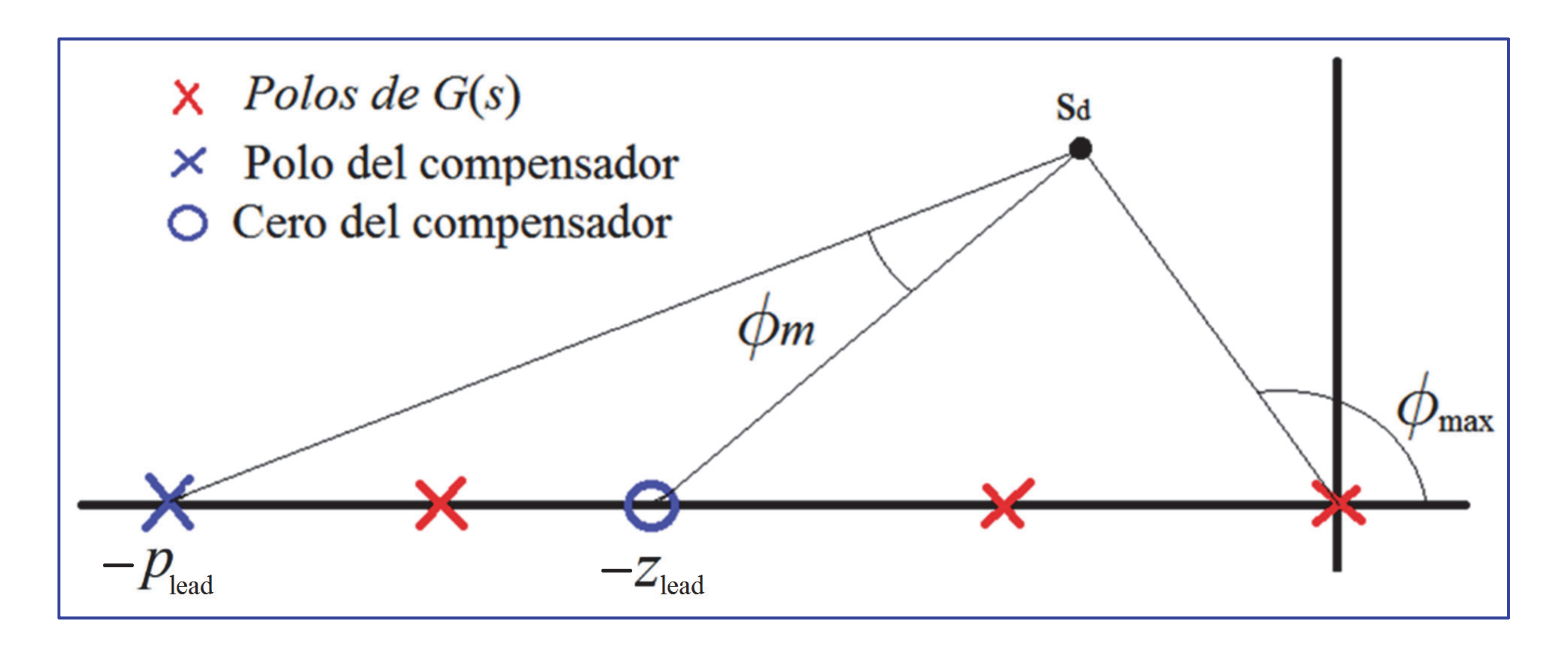


La figura siguiente resume la secuencia de diseño anterior.



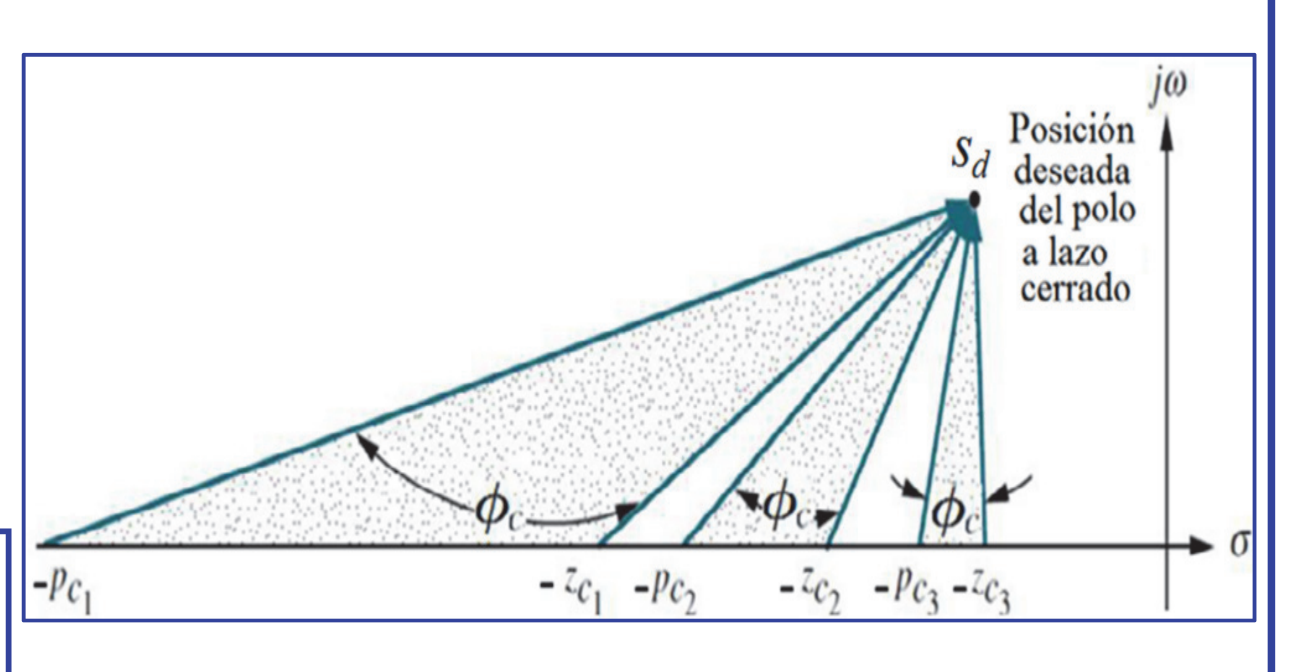
Análisis del diseño de compensadores de adelanto de fase

En el diseño mediante el lugar de las raíces, el compensador de adelanto debía adicionar la fase $\phi_m < \phi_{\max}$ en los puntos s_d y s_d^* (posición de los polos complejos conjugados dominantes).



-

En el diseño con el lugar de las raíces existen infinitas soluciones para la ubicación del cero $-z_{lead}$ y el polo $-p_{lead}$ que verifican la condición de fase del LR en la posición de los polos complejos dominantes s_d.



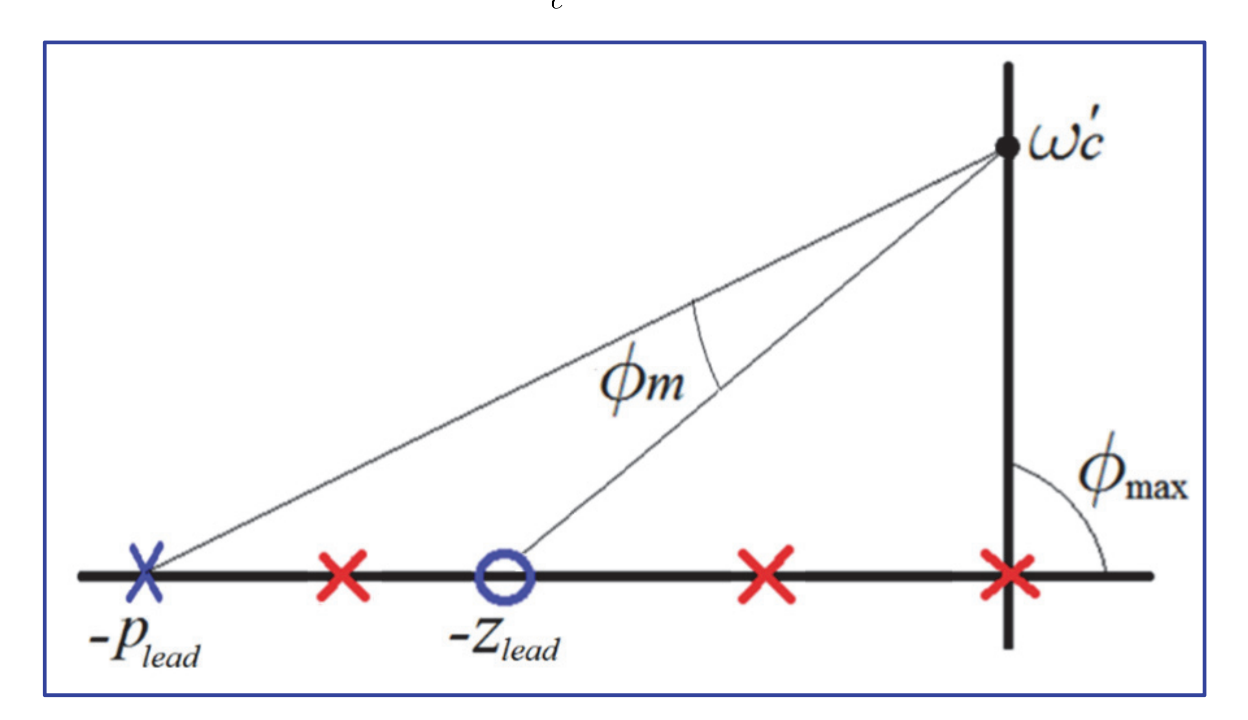
Esto es porque con la condición de fase se tiene una ecuación con dos incógnitas.

Se debe elegir la posición del cero, lo que determina automáticamente la posición del polo $-p_{lead}$ y el parámetro $\alpha_{lead} = z_{lead} / p_{lead}$. Con cualquier solución elegida quedan fijadas las posiciones $-z_{lead}$ y $-p_{lead}$ por lo que queda un solo parámetro libre, la ganancia K_c, la que se utiliza para cumplir con la condición de módulo del LR en el punto s_d.

$$\left|G_c(s_d)\right|\left|G(s_d)\right| = 1 \;\Rightarrow K_c \frac{\left|s_d + z_{lead}\right|^n}{\left|s_d + p_{lead}\right|^n}\left|G(s_d)\right| = 1 \;,\; K_c = \frac{|\; s_d + p_{lead} \;|^n}{|\; s_d + z_{lead} \;|^n |\; G(s_d) \;|}$$

-

Por otro lado, en el diseño mediante la respuesta en frecuencia el compensador aporta la fase positiva en el punto $s = j\omega_c^{'}$ sobre el eje imaginario por lo que siempre $\phi_{\max} = \pi/2$. Obviamente ahora ***no se pretende que el punto sobre el eje imaginario sea parte del lugar de las raíces, sino que el sistema compensado alcance el margen de fase deseado en la frecuencia de cruce $\omega_c^{'}$.***



Ahora en el diseño con los gráficos de Bode la situación es distinta con respecto a ubicación del cero $-z_{lead}$ y el polo $-p_{lead}$, ***en este caso la solución para la ubicación del cero y el polo es única***.

-

Esto se debe por lo que se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas por lo que el problema de ubicar el cero y el polo tiene solución única.

$$\begin{cases} z_{lead}\, p_{lead} = \omega_c'^2 \\ \dfrac{z_{lead}}{p_{lead}} = \alpha_{lead} \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_{lead} = \omega_c' \sqrt{\alpha_{lead}}}\;,\quad \boxed{p_{lead} = \omega_c' / \sqrt{\alpha_{lead}}}$$

Como en el lugar de las raíces, fijadas las posiciones de z_{lead} y p_{lead} queda un solo parámetro libre, la ganancia de Bode K^{lead} que se utiliza para cumplir con la condición de módulo de la frecuencia de cruce de ganancia $\left|L(j\omega_c')\right| = 1$.

$$\left|L(j\omega_c')\right| = \left|G_{lead}(j\omega_c')G(j\omega_c')\right| = K^{lead} \underbrace{\left|G_{lead}(j\omega_c')\right|}_{1/\alpha_{lead}^{n/2}} \left|G(j\omega_c')\right| = 1 \Rightarrow \boxed{K^{lead} = \frac{\alpha_{lead}^{n/2}}{\left|G(j\omega_c')\right|}}$$

En ninguno de los dos métodos quedan parámetros para ajustar si se desea un determinado error permanente dado por $K_n = K_n^L$. La ganancia K^{lead} obtenida anteriormente **puede o no** verificar la requerida $K^{lead} \geq K_n^L / K_n^G$.

En el diseño al igual que en el diseño con LR la ganancia K^{lead} se calcula al final **“con lo que queda”** y puede o no verificar $K^{lead} \geq K_{\min}^{lead}$.

-

Observación: Se observa en la figura con la secuencia de diseño que a partir de ζ y ω_n reemplazando ecuaciones se obtiene de manera directa las posiciones de z_{lead} y z_{lead} Entonces, se pueden calcular directamente mediante fórmulas:

$$z_{lead} = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen}\left[\tan^{-1}\left(2\zeta\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}+2\zeta^2}\right) - \measuredangle G\left(j\omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}\right)\right]}{1 - \operatorname{sen}\left[\tan^{-1}\left(2\zeta\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}+2\zeta^2}\right) - \measuredangle G\left(j\omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}\right)\right]}}$$

$$p_{lead} = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen}\left[\tan^{-1}\left(2\zeta\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}+2\zeta^2}\right) - \measuredangle G\left(j\omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}\right)\right]}{1 + \operatorname{sen}\left[\tan^{-1}\left(2\zeta\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}+2\zeta^2}\right) - \measuredangle G\left(j\omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}\right)\right]}}$$

¿Entonces para que seguir la secuencia de diseño si existen fórmulas que llevan desde el principio al final en un solo paso?

Para saber lo que se hace y verificar los resultados intermedios.

Ejemplo de diseño lead (lead1)

Datos:

La planta: $G(s) = \dfrac{100}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

Especificaciones

El margen de fase: $\bar{\phi}_L = 60^{o}$

La frecuencia de cruce: $\omega_c' = 10.88\,\mathrm{rad/seg}$.

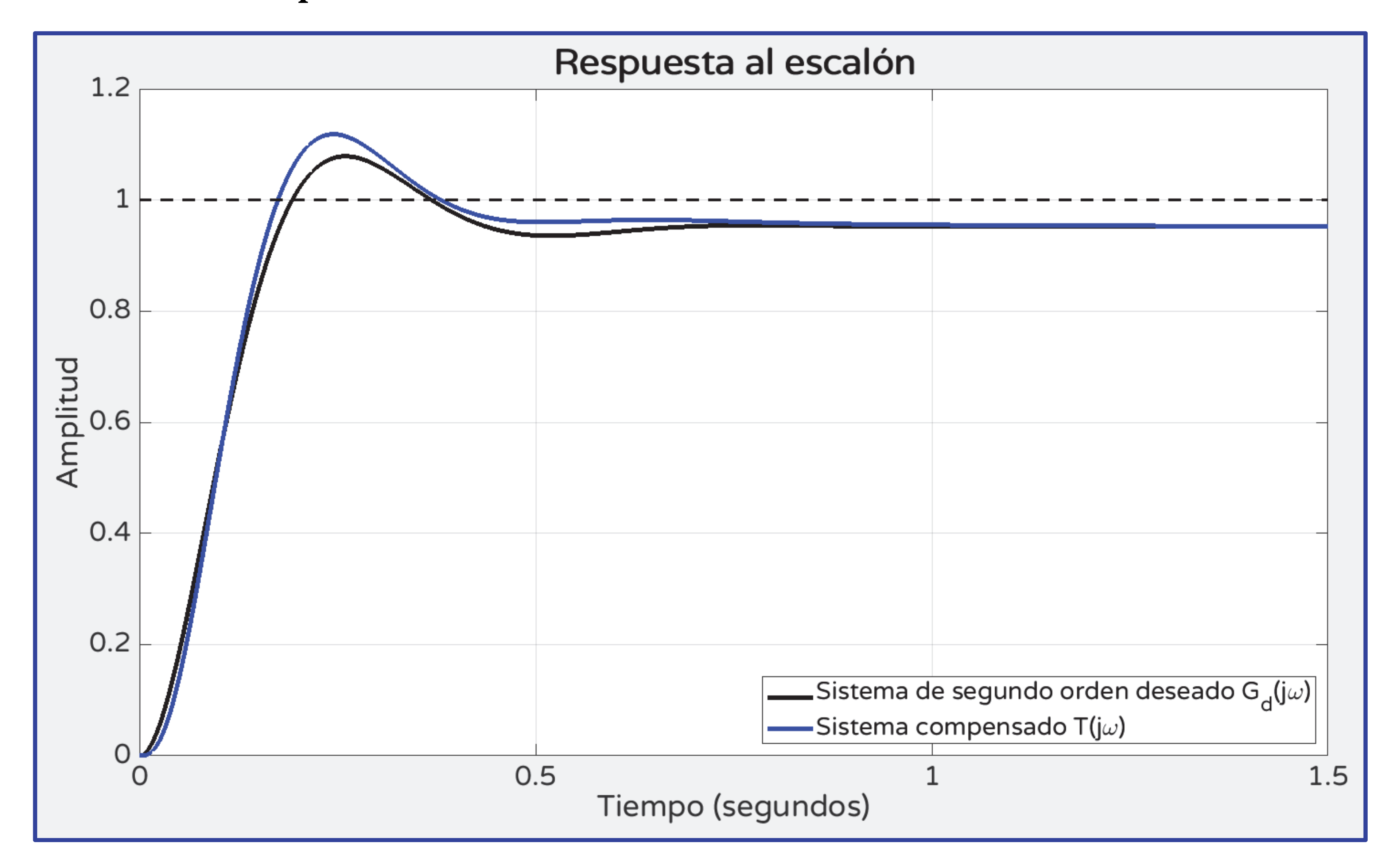
La script devuelve el compensador de adelanto: $G_{lead}(s) = \dfrac{140\,(s+3.2)^2}{(s+35.3)^2}$

```
LAS CARACTERÍSTICAS OBTENIDAS CON EL DISEÑO SON:
La sobreelongación especificada (vía MF) es:       %Os = 13.2678%
La sobreelongación del sistema compensado es:      %Os = 17.49%
El margen de fase especificado es:                  MF = 55 grados
El margen de fase del sistema compensado es:        MF = 55.0001 grados
La frecuencia de cruce especificada es:           wc_L = 10.5929 rad/seg
La frecuencia de cruce del sistema compensado es: wc_L = 10.5929 rad/seg
La ganancia estática del error es:                  K0 = 19.0022
```

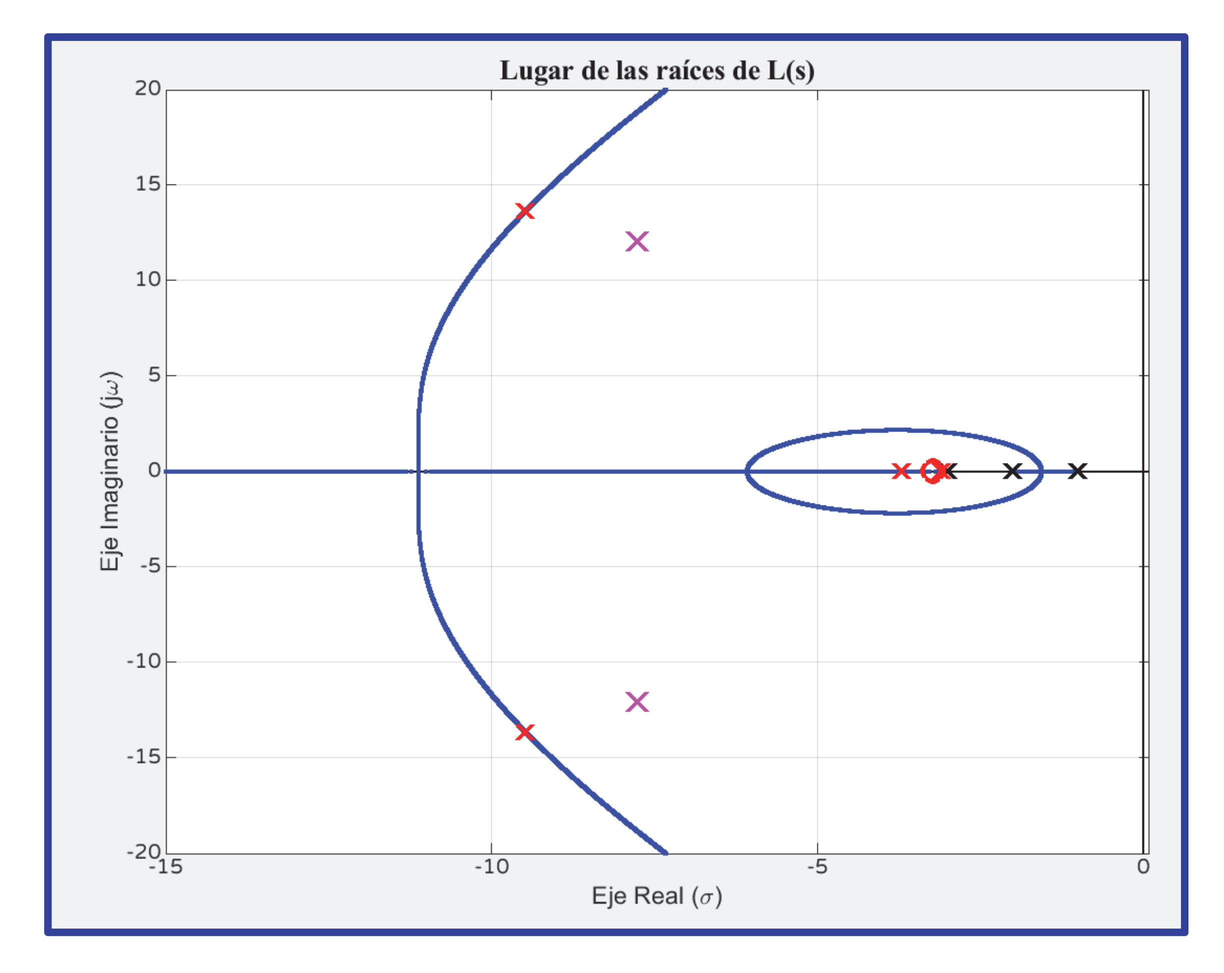
La tabla indica que se cumplen las especificaciones y que la ganancia estática del error resultante es $K_0 = 19$.

-

Respuesta al escalón unitario del sistema de segundo orden prototipo y del sistema compensado.

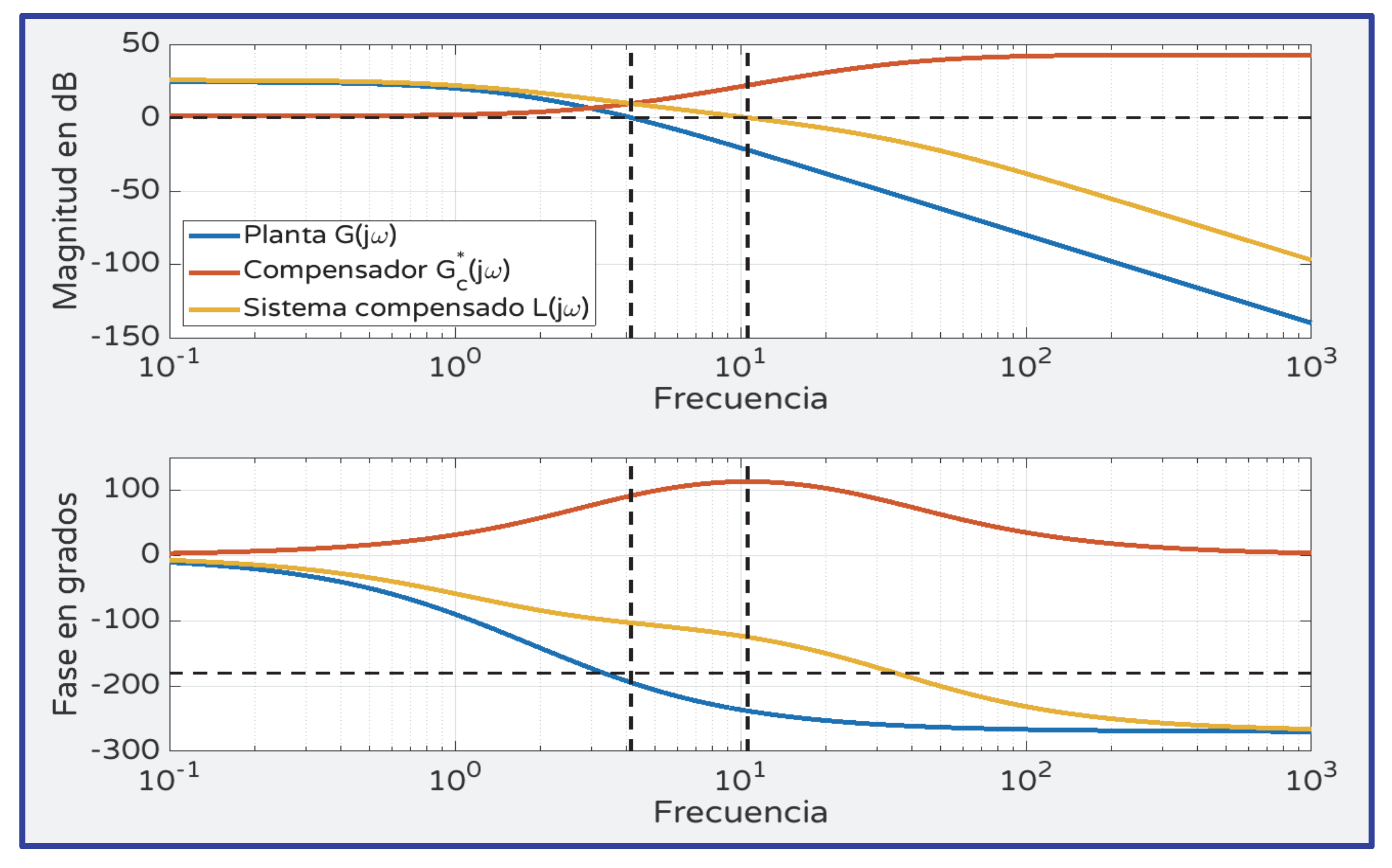


Lugar de las raíces de $L(s)$



La figura siguiente muestra los diagramas de Bode de $G(j\omega)$, $G_{lead}(j\omega)$ y $L(j\omega)$. Analizar estos diagramas en detalle para entender como el sistema compensado incrementa su frecuencia de cruce de ganancia y su margen de fase.

-



Las dos líneas a trazos verticales indican las frecuencias de cruce de ganancia de la planta ω_c y del sistema compensado $\omega_c^{'}$ $(\omega_c < \omega_c^{'})$. Se observa claramente que el compensador entrega su máxima fase positiva $\Phi_m = 118.92^o$ a la frecuencia $\omega_c^{'} = 10.88\,\mathrm{rad/seg}$, (cada una de las dos etapas entrega $\phi_m = 59.46^o$ a esa frecuencia). ■■■

Diseño de compensadores de adelanto con especificaciones distintas

i) Diseño lead2: Se especifican $\bar{\phi}_L$ y K_n.

ii) Diseño lead3: Se especifican ω_c' y K_n.

Diseño lead2 (se dan las especificaciones $\bar{\phi}_L$ y K_n)

En este diseño ***no interesa el tiempo del transitorio o lo que es lo mismo la frecuencia de cruce de ganancia***, se da solamente el margen de fase requerido $\bar{\phi}_L$ y la especificación K_n para el error en régimen permanente. Como no se conoce $\omega_c' = \omega_c^L$, tampoco se conoce la frecuencia natural no amortiguada $\omega_n = \omega_c' / \sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}$. Por lo tanto, no se tiene la posición de los polos complejos conjugados $s_d, s_d^* = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$, se tienen infinitos puntos del segmento de recta $\zeta = \text{cte}$.

Se conoce entonces la función de transferencia de la planta $G(s)$ o sus diagramas de Bode ($|G(j\omega)|$ y $\measuredangle G(j\omega)$), el margen de fase $\bar{\phi}_L$, y la constante estática del error K_n.

La estructura de $G_{lead}^*(j\omega)$ es la misma para todos los compensadores lead:

$$G_{lead}^*(s) = K_c^{lead}\frac{(s+z_{lead})}{(s+p_{lead})} = \underbrace{K_c^{lead}\alpha_{lead}}_{K^{lead}}\underbrace{\frac{(s/z_{lead}+1)}{(s/p_{lead}+1)}}_{G_{lead}(s)} = K^{lead}G_{lead}(s)$$

-

Se puede desarrollar un conjunto de ecuaciones como en el diseño anterior (**lead1**) pero no se justifica porque resulta el diseño mucho más complicado (hay que resolver numéricamente ecuaciones implícitas no lineales).

Se realizará el diseño **lead2** aprovechando que el diseño **lead1** es muy sencillo y directo. Supongamos que ya desarrollamos una **function** de Matlab que resuelve el diseño **lead1**, por ejemplo,

```
[Gc,Kc,zc,pc,n]=lead1_Bode_design(G,MF,wc_L)
```

En el diseño **lead2** se especifica $\bar{\phi}_L$, luego $\zeta = \dfrac{\tan(\bar{\phi}_L)}{2\sqrt[4]{1+\tan(\bar{\phi}_L)}} = cte$

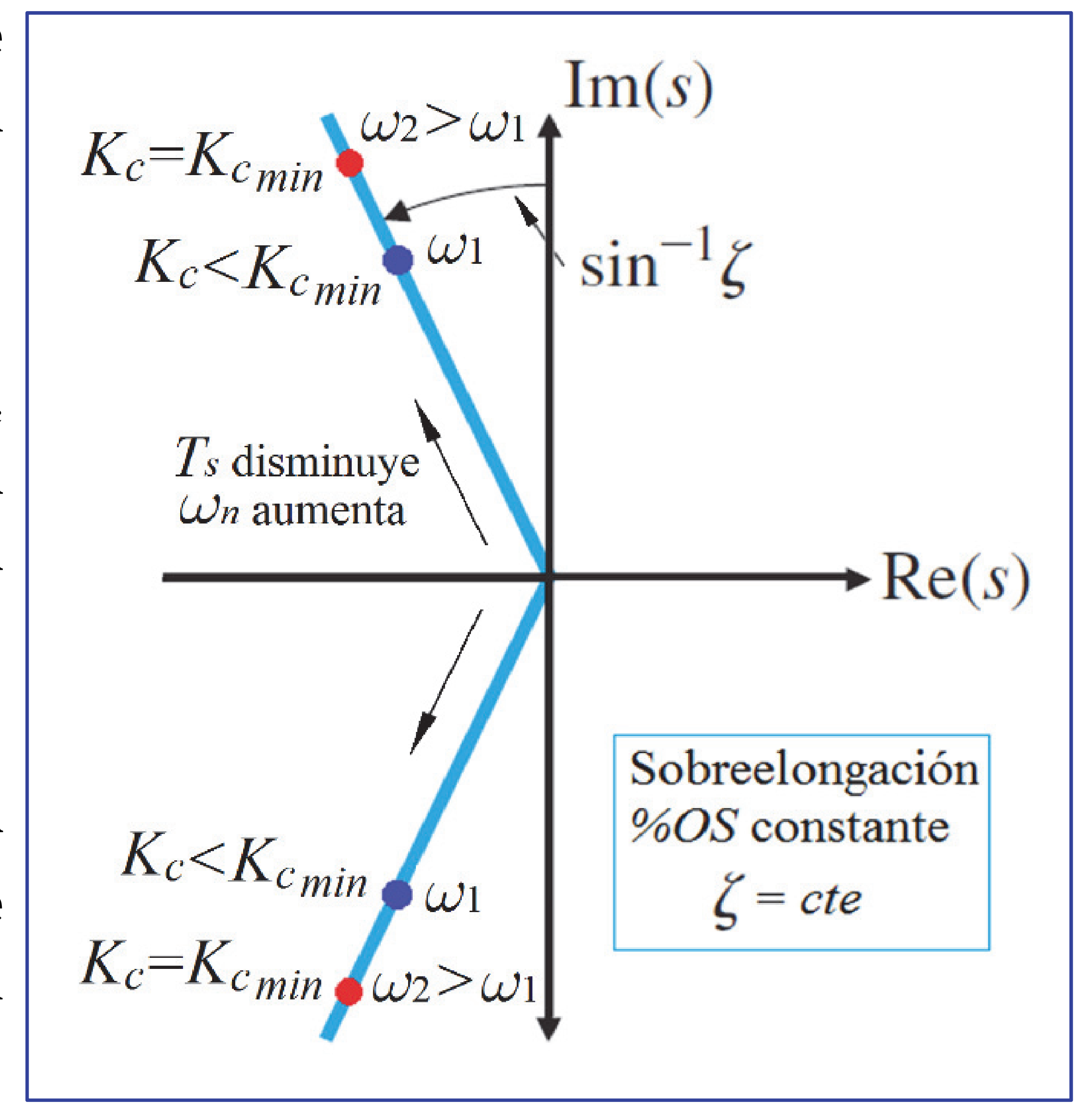
La frecuencia de cruce de ganancia ω_c' es desconocida porque no se ha especificado, pero en la aproximación de segundo orden responde a la ecuación:

$$\omega_c' = \omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2} \Rightarrow \omega_n = cte \times \omega_c'$$

En el diseño con el lugar de las raíces realizamos la búsqueda de $K_c^{lead} \approx K_{c\min}^{lead}$ incrementando ω_n.

Como ω_n es proporcional a ω_c' en el diseño en frecuencia realizamos la búsqueda de la ganancia de Bode $K^{lead} \approx K_{\min}^{lead}$ incrementando ω_c'.

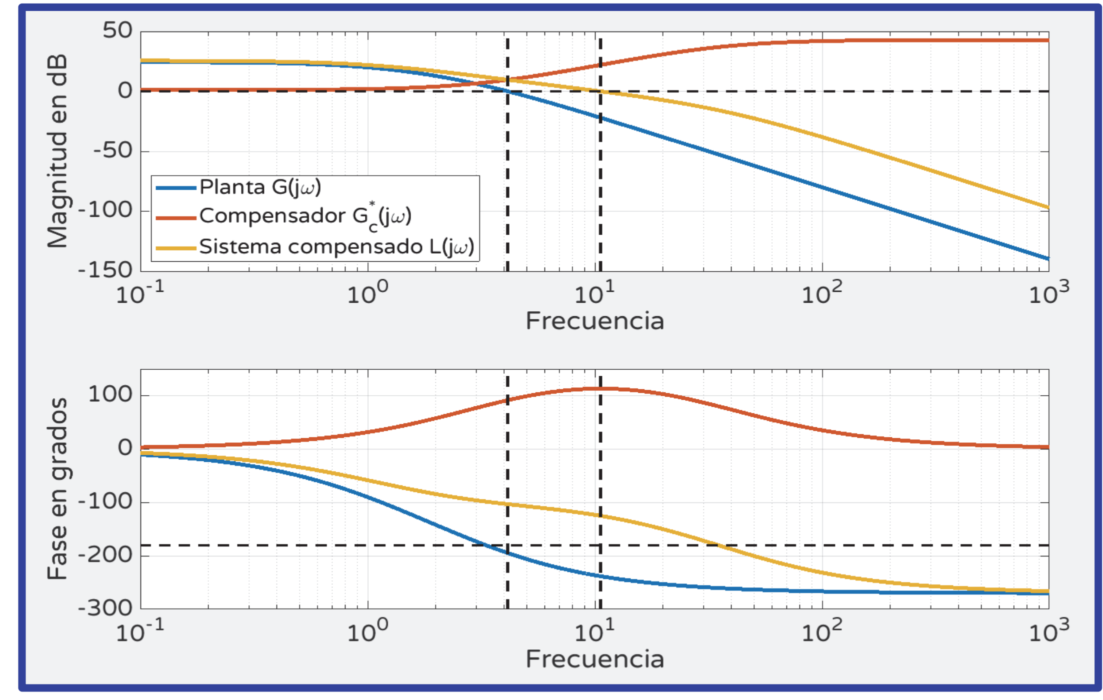
Donde $K_{\min}^{lead} = K_n / K_n^G$ es la ganancia mínima de Bode que permite cumplir con la especificación K_n.



La ganancia de bode del sistema compensado es $K^{lead} = \alpha_{lead}{}^{n/2} \left| G(j\omega_c') \right|^{-1}$.

Como se mantiene fija la especificación $\bar{\phi}_L = cte$ y se verifica que:

$$\omega_c' \uparrow \begin{cases} \Rightarrow \quad \left| G(j\omega_c') \right| \downarrow \\ \Rightarrow \quad \underbrace{\phi_m}_{(\bar{\phi}_L - \pi - \measuredangle G(j\omega_c'))/n} \rightarrow cte \Rightarrow \underbrace{\alpha_{lead}}_{\frac{1-\text{sen}(\phi_m)}{1+\text{sen}(\phi_m)}} \rightarrow cte \Rightarrow K^{lead} = \dfrac{\alpha_{lead}{}^{n/2}}{\left| G(j\omega_c') \right|} \uparrow \end{cases}$$



-

Entonces utilizando la `function` **`lead1_Bode_design`**, se inicia la búsqueda desde un valor pequeño de ω_c' y se va incrementando de a poco hasta que se verifique $K^{lead} \approx K_{\min}^{lead}$.

Observación: Como $K^{lead} = K_{\min}^{lead} \Rightarrow \left|G(j\omega_c')\right| = {\alpha_{lead}}^{n/2}\left(K_n / K_n^G \right)^{-1}$, entonces es equivalente, realizar la búsqueda desde un valor pequeño de ω_c' y se va incrementando de a poco ω_c' hasta que se verifique que $\left|G(j\omega_c')\right| \approx {\alpha_{lead}}^{n/2}\left(K_n / K_n^G \right)^{-1}$.

Sobre los modelos deseados o de referencia

$G_d(s) = \dfrac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$ este modelo no es adecuado cuando una de las especificaciones es la ganancia del error K_n.

Para una planta tipo 0 con la especificación K_0 el modelo adecuado es:

$$\boxed{G_d(s) = \left(\frac{K_0}{1+K_0}\right)\frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}}, \quad G_d(0) = \frac{K_0}{1+K_0} = T(0) = y_d^{ss}$$

ya que: $K_0 = L(0) = \dfrac{T(0)}{1-T(0)} = \dfrac{y_d^{ss}}{1-y_d^{ss}} \Rightarrow \dfrac{K_0}{1+K_0} = y_d^{ss}$

Para una planta tipo 1 con las especificaciones K_1 y $\bar{\phi}_L$ el modelo adecuado considerando que $\zeta = \dfrac{\tan(\bar{\phi}_L)}{2\sqrt[4]{1+\tan(\bar{\phi}_L)}}$ es:

$$\boxed{G_d(s) = \frac{4\zeta^2 {K_1}^2}{s^2 + 4\zeta^2 K_1 s + 4\zeta^2 {K_1}^2}}, \quad G_d(0) = 1 \text{ Por ser tipo 1}$$

-

Ejemplo de diseño lead2 utilizando la function

lead1_Bode_design

Datos:

La planta: $G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

Especificaciones

Ganancia estática del error: $K_0 = 20$

Margen de fase: $\bar{\phi}_L = 60^{\mathrm{o}}$

-

La siguiente script realiza el diseño `lead2` utilizando la `function` **`lead1_Bode_design`**

```
% Ejemplo de diseño lead2 utilizando la function
% lead1_Bode_design
% Planta
G=zpk([],[-1 -2 -3],100);
MF=55; Kn=20;    % Especificaciones MF y Kn
Kn_G=dcgain(G); % Calculamos Kn_G
% Se diseña el compensador lead2 con el lead1
K_lead_min=Kn/Kn_G;
[~,~,~,wc_L] = margin(G); % Para inicializar wc_L
K_lead=0;
while K_lead<K_lead_min
Glead = lead1_Bode_design(G,MF,wc_L);
K_lead = dcgain(Glead);
wc_L = wc_L+.001;
end % while
```

-

La script devuelve el compensador de adelanto:

$$G_{lead}(s) = \frac{155\,(s+3.23)^2}{(s+36.7)^2}$$

El compensador es muy parecido al diseñado con `lead1` los resultados son similares. La tabla muestra que se cumplen las especificaciones y que la frecuencia de cruce resultante es $\omega_c' = 10.88\,\mathrm{rad/seg}$.

```
LAS CARACTERÍSTICAS OBTENIDAS CON EL DISEÑO SON:
La ganancia estática especificada es:           Kn = 20
La ganancia con el compensador es:            Kn_L = 20.0116
El error permanente especificado es:           ess = 0.05
El error permanente del sistema compensado es: ess = 0.047593
La sobreelongación especificada (vía MF) es:   %Os = 13.2678%
La sobreelongación del sistema compensado es:  %Os = 17.4175%
El margen de fase especificado es:              MF = 55 grados
El margen de fase del sistema compensado es:    MF = 55.0001 grados
La fre. de cruce de ganancia del sistema compensado es: wc_L = 10.88 rad/seg
```

-

Diseño lead3 (se dan las especificaciones ω_c' y K_n)

Este diseño se utiliza para la cumplir con las especificaciones del error permanente K_n y la frecuencia de cruce de ganancia ω_c'. En este diseño disminuye $\bar{\phi}_L$, obviamente no tiene sentido deteriorar mucho el margen de fase pero este diseño es razonable si la planta sin compensar tiene un margen de fase excesivo comportándose prácticamente como una de primer orden (por ejemplo, $\bar{\phi}_G > 70^o$) y se quiere incrementar un poco la precisión.

Como ahora no se conoce $\bar{\phi}_L$, tampoco se conoce el coeficiente de amortiguamiento relativo $\zeta = \tan(\bar{\phi}_L)/2\sqrt{\sqrt{1+\tan(\bar{\phi}_L)^2}}$ ni la frecuencia natural no amortiguada $\omega_n = \omega_c'/\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}$. Por lo tanto como en el diseño **`lead2`**, no se tiene la posición de los polos complejos conjugados $s_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$. Se conoce entonces la función de transferencia de la planta $G(s)$ o sus diagramas de Bode ($|G(j\omega)|$ y $\measuredangle G(j\omega)$), la frecuencia de cruce de ganancia ω_c', y la constante estática del error K_n.

Como en el caso anterior se realizará el diseño **`lead3`** aprovechando que el diseño **`lead1`** es muy sencillo y directo. Supongamos que ya desarrollamos la `function`,

```
[Gc,Kc,zc,pc,n]=lead1_Bode_design(G,MF,wc_L)
```

Ahora se mantiene fijo ω_c' y se verifica que:

$$\bar{\phi}_L \downarrow \Rightarrow \underbrace{\phi_m}_{(\bar{\phi}_L - \pi - \underbrace{\measuredangle G(j\omega_c')}_{cte})/n} \downarrow \Rightarrow \underbrace{\alpha_{lead}}_{\frac{1-\text{sen}(\phi_m)}{1+\text{sen}(\phi_m)}} \uparrow \Rightarrow \underbrace{K^{lead}}_{\frac{\alpha_{lead}^{n/2}}{\underbrace{|G(j\omega_c')|}_{cte}}} \uparrow$$

Como K^{lead} es inversamente proporcional a $\bar{\phi}_L$ en el diseño en frecuencia **`lead3`** utilizamos como antes la `function` **`lead1_Bode_design`**, para la búsqueda de la ganancia de Bode $K^{lead} \approx K_{\min}^{lead}$, disminuyendo $\bar{\phi}_L$ desde su valor máximo posible $(\pi/2)$ hasta que se verifique $K^{lead} \approx K_{\min}^{lead}$.

El compensador obtenido cumple con la especificación de K_n ya que $K^{lead} \approx K_{\min}^{lead}$ y ω_c' se ha mantenido constante en el valor especificado. No se tiene control sobre el valor de $\bar{\phi}_L$ obtenido, puede resultar un sistema con oscilaciones grandes poco amortiguadas inaceptable.

Ejemplo de diseño lead3 utilizando la function `lead1_Bode_design`

Datos:

La planta: $G(s) = \dfrac{100}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

Especificaciones

Ganancia estática del error: $K_0 = 20$

La frecuencia de cruce: $\omega_c' = 10.88\,\mathrm{rad/seg}$.

El margen de fase deberá ser: $\bar{\phi}_L = 60^{\circ}$ ya que se han intercambiado especificaciones con el ejemplo anterior.

-

La siguiente script realiza el diseño **lead2** utilizando la function **lead1_Bode_design**

```
% Ejemplo de diseño lead3 utilizando la function
% lead1_Bode_design
G=zpk([],[-1 -2 -3],100); % Planta
Kn_G=dcgain(G); % Calculamos Kn_G
% Especificaciones wc_L y Kn
wc_L = 10.2819; Kn=20;
% Diseño del lead3
MF=90; % Se inicializa el MF con el valor máximo
K_lead_min = Kn/Kn_G;
K_lead=0;
while K_lead<K_lead_min
Glead = lead1_Bode_design(G,MF,wc_L);
Kc_lead=dcgain(Glead)
MF = MF -.01;
end % while
```

-

La script devuelve el compensador de adelanto: $$G_{lead}(s) = \frac{133(s+3.27)^2}{(s+34.4)^2}$$

El compensador es muy parecido al diseñado con **lead1** y **lead2** los resultados son similares.

La tabla siguiente muestra que se cumplen las especificaciones y que el margen de fase resultante es $\bar{\phi}_L = 53.37^{\circ}$.

```
LAS CARACTERÍSTICAS OBTENIDAS CON EL DISEÑO SON:
La ganancia estática especificada es:            Kn = 20
La ganancia con el compensador es:             Kn_L = 20.0009

El error permanente especificado es:            ess = 0.05
El error permanente del sistema compensado es: ess = 0.047617

El margen de fase del sistema compensado es:   %MF = 53.3651 grados
La sobreelongación del sistema compensado es:  %Os = 19.2544%
```

■■■

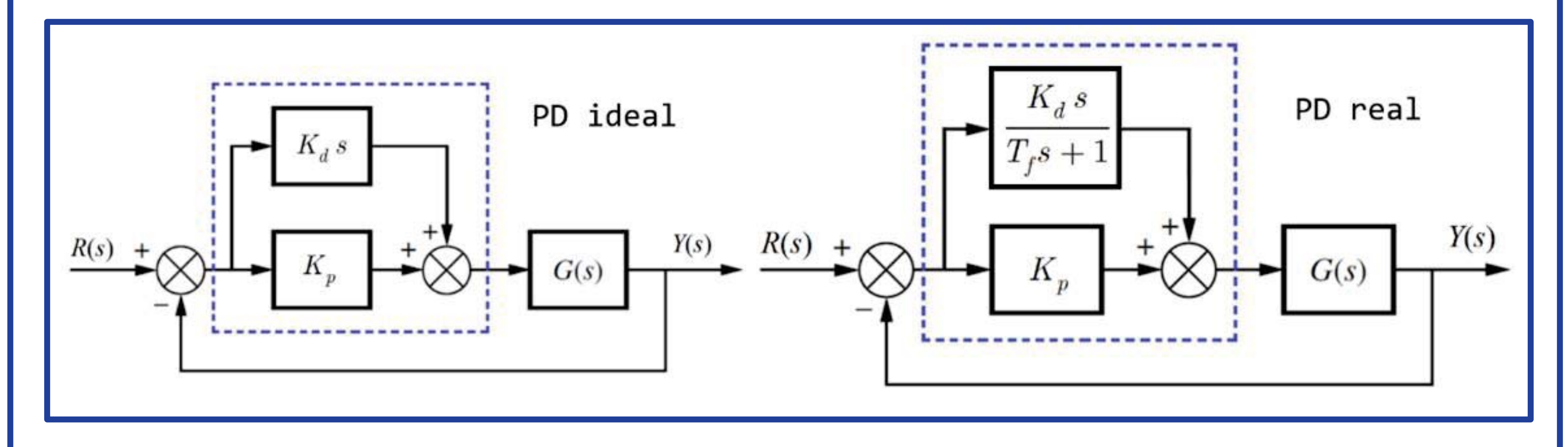
Control II - 2024

Compensadores PD
Diseño mediante diagramas de Bode

Compensador proporcional derivativo PD

Vimos en el diseño con el lugar de las raíces que en una red de adelanto de fase de una etapa $G_{lead}(s)$ converge a un compensador PD cuando el polo es muy rápido ($p_{lead} \to \infty$). Según la aproximación que se realice la convergencia es a un PD real o ideal.

$$G_{lead}(s) = \left.\frac{K_{lead}(s + z_{lead})}{(s + p_{lead})}\right|_{p_{lead} \to \infty} \Rightarrow \begin{cases} G_{\text{PD(ideal)}}(s) = K_p + K_d\, s = K_p \;\; 1 + T_d\, s \\ G_{\text{PD(real)}}(s) = K_p + \dfrac{K_d\, s}{T_f\, s + 1} = K_p \left(1 + \dfrac{T_d\, s}{T_f\, s + 1}\right) \end{cases}$$



Para unificar el desarrollo consideremos el PD ideal como un caso particular del real para $T_f = 0$. Según la parametrización que se utilice se tienen tres modelos o representaciones.

$$G_{\mathrm{PD}}(s) = \begin{cases} K_p + K_d \dfrac{s}{(T_f s + 1)} & , K_p, K_d, T_f \\[2ex] K_p \left(1 + \dfrac{T_d s}{(T_f s + 1)}\right) & , K_p, T_d, T_f \\[2ex] K_{PD} \dfrac{(s + z_{PD})}{(s + p_{PD})} & , K_{PD}, z_{PD}, p_{PD} \end{cases}$$

Modelo 1:

$$G_{\mathrm{PD}}(s) = K_p + K_d \frac{s}{(T_f s + 1)}, \quad K_p, K_d, T_f$$

Este modelo (aparece en la figura anterior) es la forma paralela, es la adecuada para utilizar el comando **pid** de Matlab $G_{PD(real)}$ = pid(K_p,K_i,K_d,T_f) o $G_{PD(ideal)}$ = pid(K_p,K_i,K_d).

Modelo 2:

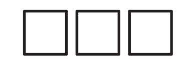
$$G_{\mathrm{PD}}(s) = K_p \left(1 + \frac{T_d s}{(T_f s + 1)}\right), \quad K_p, T_d, T_f$$

Este es el estándar o teórico, $T_d = K_d / K_p$ es la constante de tiempo derivativa que tiene un significado físico claro, define la constante de tiempo del cero y el punto de quiebre en los diagramas de Bode, se sigue utilizando fácilmente el comando **pid** de Matlab:

$G_{PD(real)}$ = pid(K_p,K_i,$K_p T_d$,T_f) o $G_{PD(ideal)}$ = pid(K_p,K_i,$K_p T_d$).

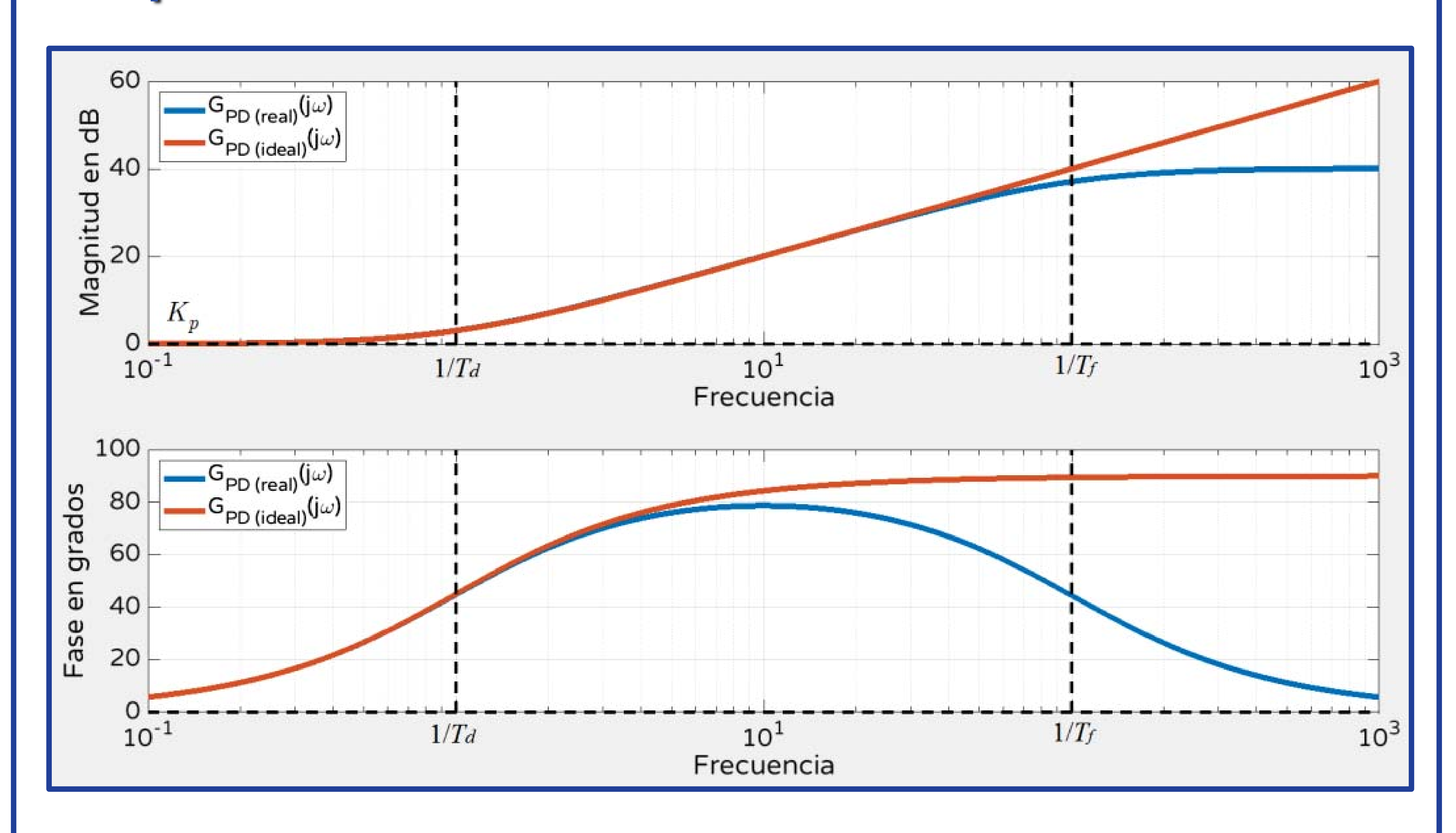
Modelo 3: $G_{\mathrm{PD}}(s) = K_{PD}\dfrac{(s+z_{PD})}{(s+p_{PD})}, \quad K_{PD}, z_{PD}, p_{PD}$

Este modelo es básicamente la red de adelanto de siempre, pero ahora elegimos libremente el valor de $p_{PD} = 1 / T_f$ para el PD real o $p_{PD} = \infty$ en el PD ideal por lo que desaparece.



Si es una red de adelanto, ¿por qué ahora se tiene la libertad de elegir la posición del polo y antes no? Observando la respuesta en frecuencia de PD ideal se nota que ahora la frecuencia donde la fase es máxima es $\omega_m = \infty$ (filtro pasa alto ideal), la fase tiende asintóticamente a 90º, entonces $\omega_m = \sqrt{z_{PD}p_{PD}} \to \infty$ para $p_{PD} \to \infty$. Una restricción menos es un grado de libertad que se gana para elegir un parámetro.

Respuesta en frecuencia del PD real e ideal



Para unificar el desarrollo consideremos el PD ideal como un caso particular del real para $T_f = 0$. En el diseño se conoce la planta $G(s)$, las especificaciones $\bar{\phi}_L$ y $\omega_c^{'}$, y T_f (lo elegimos nosotros).

$$G_{\mathrm{PD}}(s) = K_p + K_d \frac{s}{(T_f s + 1)} = K_p \left(1 + \frac{T_d\, s}{(T_f s + 1)} \right)$$

$$= \frac{K_p (T_f + T_d)}{T_f} \frac{\left(s + \dfrac{1}{T_f + T_d} \right)}{\left(s + \dfrac{1}{T_f} \right)} = K_{PD} \frac{(s + z_{PD})}{(s + p_{PD})}$$

Determinamos los parámetros T_d y K_p. Como $\omega_c^{'}$ es la frecuencia de cruce de ganancia de $L(j\omega)$ se deben cumplir las condiciones de magnitud y fase: $\left| L(j\omega_c^{'}) \right| = 1$ y $\measuredangle L(j\omega_c^{'}) = \bar{\phi}_L - \pi$.

- Se determina T_d a partir de la condición de fase $\measuredangle L(j\omega_c') = \bar{\phi}_L - \pi$

$$\measuredangle L(j\omega_c') = \underbrace{\measuredangle G_{\text{PD}}(j\omega_c')}_{\phi_m} + \measuredangle G(j\omega_c') = \bar{\phi}_L - \pi \rightarrow$$

$$\phi_m = \bar{\phi}_L - \pi - \measuredangle G(j\omega_c')$$

$$\measuredangle G_{\text{PD}}(j\omega_c') = \measuredangle(j\omega_c' + 1/(T_f + T_d)) - \measuredangle(j\omega_c' + 1/T_f) = \phi_m$$

$$\measuredangle(j\omega_c' + 1/(T_f + T_d)) = \tan^{-1}\left((T_f + T_d)\omega_c'\right) = \phi_m + \measuredangle(j\omega_c' + 1/T_f)$$

$$T_d = \frac{\tan\left(\phi_m + \measuredangle(j\omega_c' + 1/T_f)\right)}{\omega_c'} - T_f$$

- Se determina K_p a partir de la condición de magnitud $\left|L(j\omega_c^{'})\right| = \left|G_{\mathrm{PD}}(j\omega_c^{'})\right|\left|G(j\omega_c^{'})\right| = 1$ y de utilizar el valor de T_d hallado.

$$\left|G_{\mathrm{PD}}(j\omega_c^{'})\right| = \frac{K_p(T_f + T_d)}{T_f}\frac{\left|j\omega_c^{'} + 1/(T_d + T_f)\right|}{\left|j\omega_c^{'} + 1/T_f\right|}$$

$$\left|L(j\omega_c^{'})\right| = \frac{K_p(T_f + T_d)}{T_f}\frac{\left|j\omega_c^{'} + 1/(T_d + T_f)\right|}{\left|j\omega_c^{'} + 1/T_f\right|}\left|G(j\omega_c^{'})\right| = 1$$

$$K_p = \frac{T_f\left|j\omega_c^{'} + 1/T_f\right|}{(T_f + T_d)\left|j\omega_c^{'} + 1/(T_d + T_f)\right|\left|G(j\omega_c^{'})\right|}$$

- Se determinan K_{PD}, z_{PD}, p_{PD} y K_d a partir de los tres conocidos: T_f, K_p, y T_d

$K_{PD} = K_p(T_f + T_d)/T_f$ | $z_{PD} = 1/(T_f + T_d)$ | $p_{PD} = 1/T_f$ | $K_d = K_p T_d$

- Los parámetros del PD ideal se obtienen de los anteriores para $T_f \rightarrow 0$. Se llega a (ver el apunte):

$$T_d = \frac{\tan(\phi_m)}{\omega_c'}$$

$$K_p = \frac{\cos(\phi_m)}{\left|G(j\omega_c')\right|}$$

Como $G_{\mathrm{PD(ideal)}}(s) = K_p + K_d\, s = K_p T_d \left(s + \frac{1}{T_d} \right) = K_{PD} \frac{(s + z_{PD})}{(s + p_{PD})}$, los parámetros K_{PD}, z_{PD} y K_d se determinan con K_p y T_d:

$$K_{PD} = K_p T_d \quad , \quad z_{PD} = 1 / T_d \quad \text{y} \quad K_d = K_p T_d$$

Ya se conocen las expresiones de todos los parámetros de diseño en los tres modelos.

Diseño del compensador PD real

Con Matlab: $G_{PD(real)} = \text{pid}(K_p, K_i, K_d, T_f)$

Paso 1) Se asigna la constante de tiempo del polo T_f para que sea por lo menos dos veces menor que la constante de tiempo más rápida del sistema (inversa del polo más alejado del origen).

Paso 2) Se calcula $\phi_m = \bar{\phi}_L - \pi - \measuredangle G(j\omega_c^{'})$

Paso 3) Se calculan K_p, T_d y K_d:

$$K_p = \frac{T_f \left| j\omega_c^{'} + 1/T_f \right|}{(T_f + T_d)\left| j\omega_c^{'} + 1/(T_d + T_f) \right| \left| G(j\omega_c^{'}) \right|}$$

$$T_d = \frac{\tan\left(\phi_m + \measuredangle(j\omega_c^{'} + 1/T_f)\right)}{\omega_c^{'}} - T_f \quad , \quad K_d = K_p T_d$$

En forma alternativa:

$$K_{PD} = K_p (T_f + T_d) / T_f, \quad z_{PD} = 1 / (T_f + T_d), \quad p_{PD} = 1 / T_f$$

Con Matlab: $G_{PD(real)}$ = zpk(-z_{PD},-p_{PD},K_{PD})

Diseño de compensador PD ideal

Con Matlab: `G_PD (ideal) = zpk(-z_PD,[],K_PD)`

$$G_{PD\ (ideal)} = \mathrm{zpk}(-z_{PD},[\,],K_{PD})$$

Paso 1) Se calcula $\phi_m = \bar{\phi}_L - \pi - \measuredangle G(j\omega_c^{'})$

Paso 2) Se calculan $K_p = \dfrac{\cos(\phi_m)}{\left|G(j\omega_c^{'})\right|}$, $T_d = \dfrac{\tan(\phi_m)}{\omega_c^{'}}$ y $K_d = K_p T_d$

Con Matlab: `G_PD(ideal) = pid(K_p,0,K_d)`

$$G_{PD(ideal)} = \mathrm{pid}(K_p,0,K_d)$$

En forma alternativa: $K_{PD} = K_p T_d$, $z_{PD} = 1 / T_d$

□□□

Ejemplo 8: Diseño de compensadores PD real e ideal

Datos: **La planta:** $G(s) = \dfrac{50}{s(s+2)(s+3)(s+4)}$

Las especificaciones para el diseño son:

Margen de fase: $\bar{\phi}_L = 60^{o}$

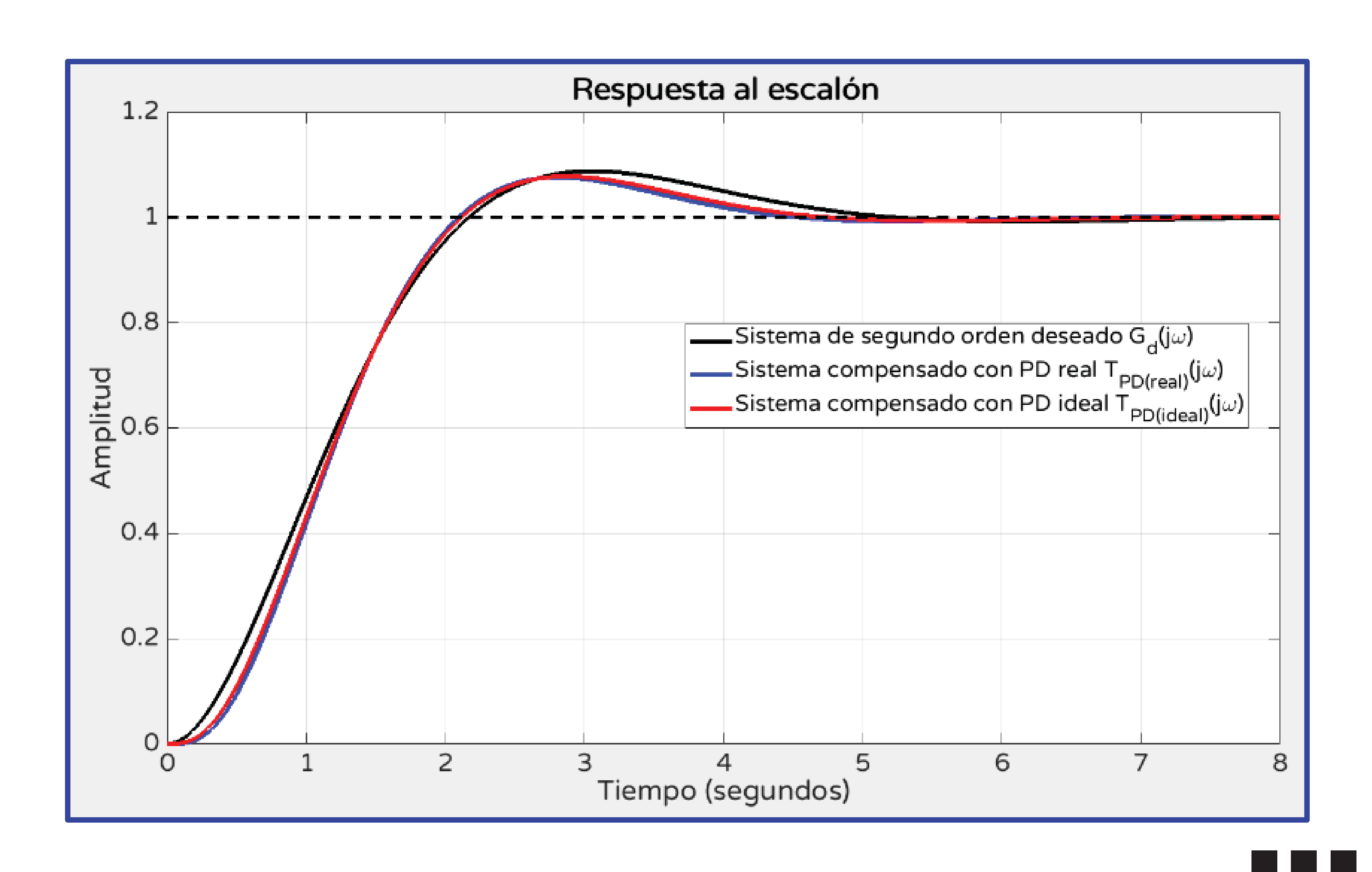
Frecuencia de cruce de ganancia = $\omega_c^{'} = 0.92\,\mathrm{rad/seg}$

Estas especificaciones dinámicas en el dominio de la frecuencia son equivalentes a las especificaciones temporales $\%Os \approx 9\%$ y $T_s \approx 5\,\mathrm{seg}$.

Los diseños llevan a los siguientes compensadores PD:

$$G_{\mathrm{PD(real)}}(s) = \frac{5.2\ (s+1.78)}{(s+20)}, \quad G_{PD(ideal)}(s) = 0.24(s+2)$$

Ambos compensadores satisfacen las especificaciones.



Respuesta al escalón
Amplitud
Tiempo (segundos)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Sistema de segundo orden deseado $G_d(j\omega)$
Sistema compensado con PD real $T_{PD(real)}(j\omega)$
Sistema compensado con PD ideal $T_{PD(ideal)}(j\omega)$

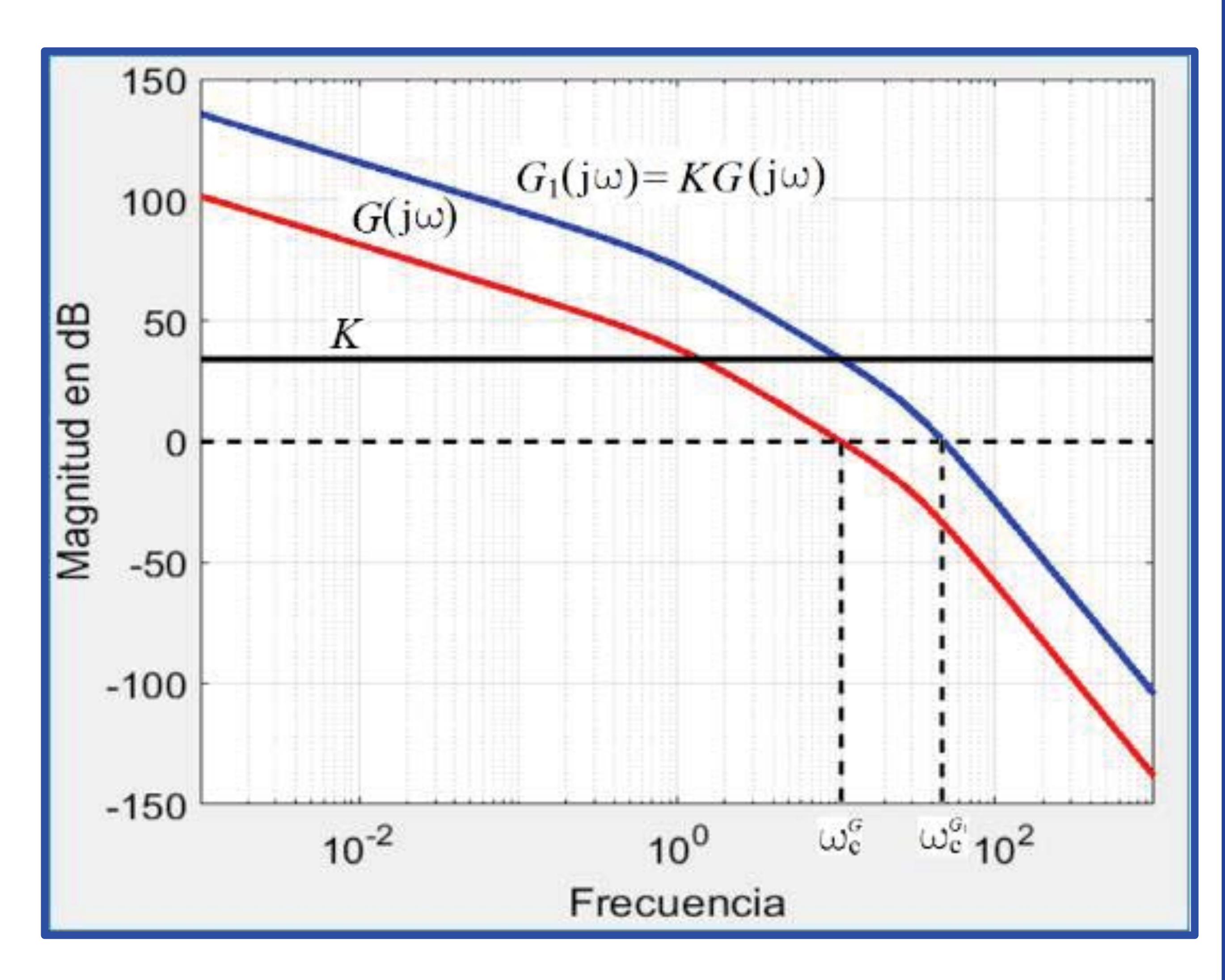
Control II - 2024

Compensadores de atraso de fase y PI
Diseño mediante diagramas de Bode

Compensadores de atraso de fase

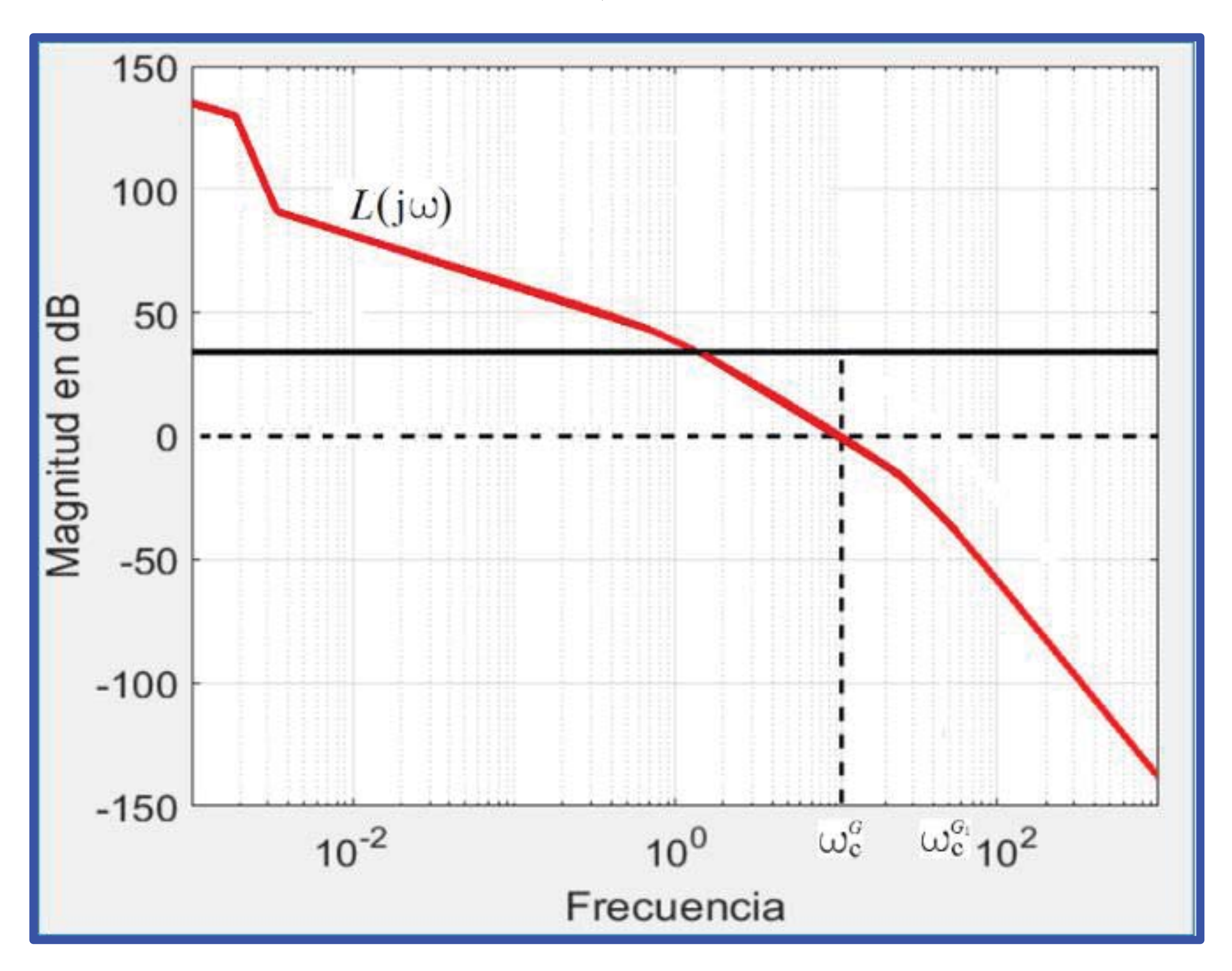
Existen tres maneras de obtener ganancia alta en baja frecuencia para disminuir el error permanente:

i) Incrementar la ganancia del sistema, esto sabemos que tiene el inconveniente de incrementar la frecuencia de cruce ω_c lo que disminuye el margen de fase y deteriora la estabilidad.



ii) Incrementar el tipo de sistema a uno superior sin cambiar "mucho" el lugar de las raíces ya que los polos están bien ubicados.

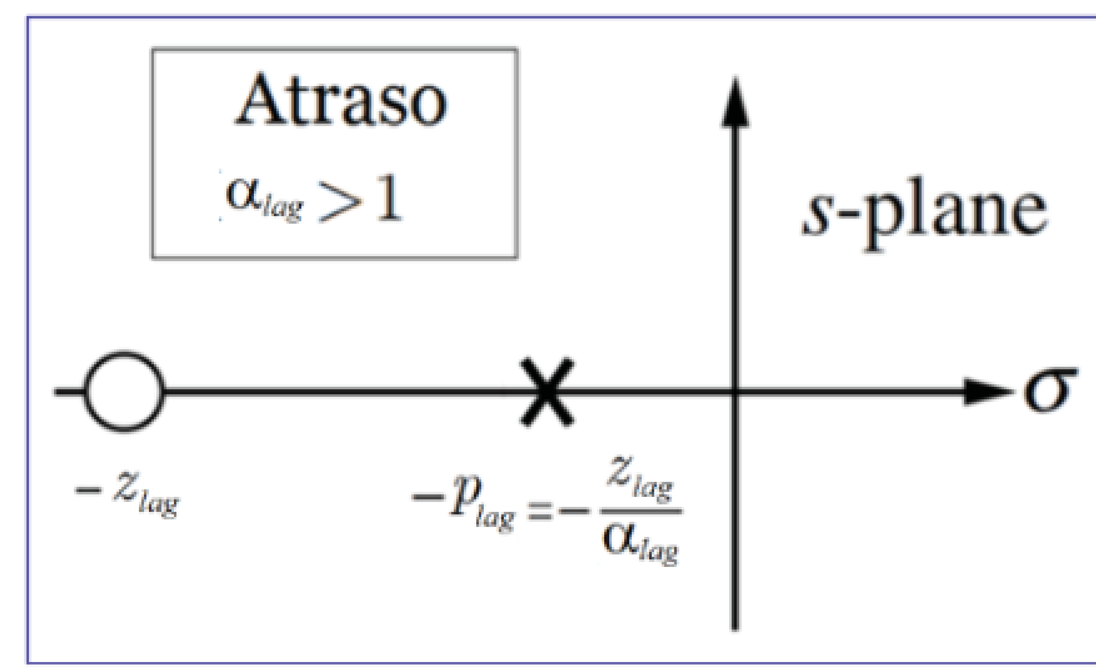
iii) Agregar un compensador de retraso de fase que incremente la ganancia a lazo cerrado a baja frecuencia.



En el diseño de los compensadores o redes de atraso de fase ***se utiliza la característica de atenuación de las altas frecuencias (característica de filtro pasa bajos),*** en lugar de la característica del atraso de fase como vimos en el diseño de los compensadores de adelanto.

Normalmente, ***la característica de retardo de fase no tiene importancia en el diseño de un compensador de atraso de fase***, pero debe controlarse sus efectos adversos en el rango de frecuencias cercanas a la de cruce de ganancia.

Como se vio en el diseño con el lugar de las raíces, el polo de una red de atraso de fase está más cerca del origen que el cero.



Estructura del compensador o red de atraso de fase

Son tres parámetros de ajuste, el cero z_{lag}, el polo p_{lag} y la ganancia K^{lag} o K_c^{lag}

$$G_{lag}^{*}(s) = K_c^{lag}\frac{s+z_{lag}}{s+p_{lag}} = \underbrace{K_c^{lag}\underbrace{\left(\frac{z_{lag}}{p_{lag}}\right)}_{\alpha_{lag}}}_{K^{lag}}\underbrace{\frac{s/z_{lag}+1}{s/p_{lag}+1}}_{G_{lag}(s)} = K^{lag}G_{lag}(s)$$

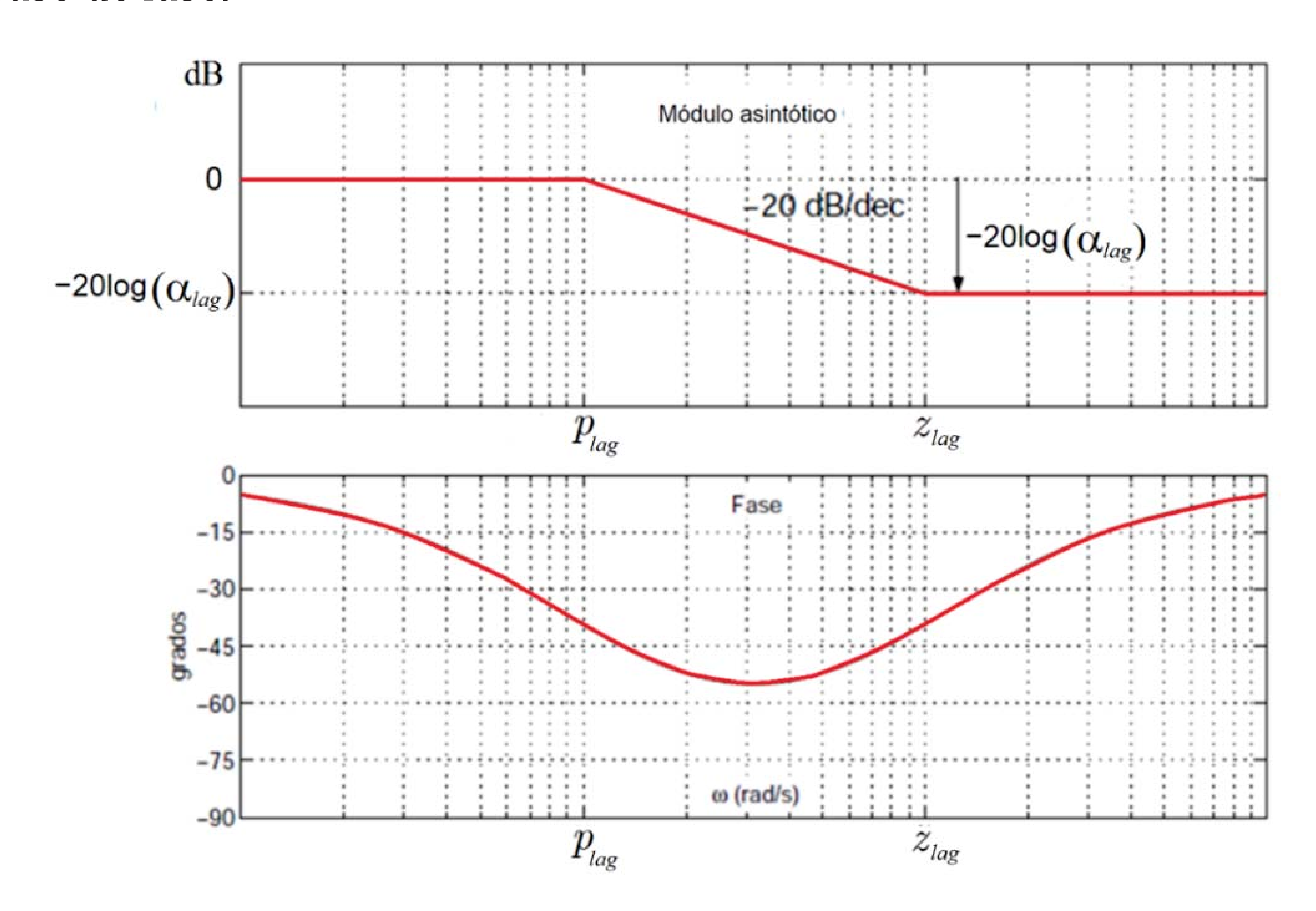
$$G_{lag}(s) = \frac{s/z_{lag}+1}{s/p_{lag}+1} = \underbrace{\left(\frac{p_{lag}}{z_{lag}}\right)}_{1/\alpha_{lag}}\frac{(s+z_{lag})}{(s+p_{lag})} = \frac{1}{\alpha_{lag}}\frac{(s+z_{lag})}{(s+p_{lag})}$$

Donde: K_c^{lag} es la ganancia del lugar de las raíces.

K^{lag} es la ganancia de Bode.

α_{lag} es el factor de amplificación del compensador de atraso.

La figura muestra el diagrama de Bode de magnitud y fase de una red de atraso de fase.



Observaciones:

Se observa que el controlador presenta una atenuación a altas frecuencias de $20\log(\alpha_{lag})$. Esto permite incrementar el módulo del sistema compensado $|L(j\omega)|$ a bajas frecuencias mejorando el régimen permanente y los márgenes de estabilidad, pero a expensas de disminuir el ancho de banda volviendo más lento al sistema compensado.

Normalmente no se utilizan filtros de atraso de fase de más de una etapa ya que cada etapa disminuye el margen de fase lo que deteriora la estabilidad del sistema.

Como se vio anteriormente, a $G_{lag}(s)$ (sin el asterisco) se le denomina compensador de atraso con ganancia estática unitaria (Unity Static Gain Lead Compensator) ya que $G_{lag}(0) = 1$.

La fase de este compensador es siempre negativa, por lo que puede empeorar el régimen transitorio, pues reduce el margen de fase del sistema.

El beneficio de un menor ancho de banda es la reducción de la sensibilidad a los errores de modelado y al ruido o perturbaciones de alta frecuencia.

La respuesta en frecuencia del compensador de atraso de fase viene dada por las fórmulas de la siguiente tabla:

Compensador de atraso de fase			
Respuesta en frecuencia			
$G_{lag}(j\omega) = \left(\frac{p_{lag}}{z_{lag}}\right)\frac{(z_{lag}+j\omega)}{(p_{lag}+j\omega)}$ $\begin{cases} \left\|G_{lag}(j\omega)\right\| = \sqrt{\frac{1+(\omega / z_{lag})^2}{1+(\omega / p_{lag})^2}} = \sqrt{\frac{\alpha_{lag}+\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2}{\alpha_{lag}\left(1+\alpha_{lag}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right)}} \\ \measuredangle G_{lag}(j\omega) = \tan^{-1}\frac{(p_{lag}-z_{lag})\omega}{z_{lag}p_{lag}+\omega^2} = \tan^{-1}\left(\frac{1-\alpha_{lag}}{\sqrt{\alpha_{lag}}}\right)\left(\frac{\omega_m\omega}{\omega_m{}^2+\omega^2}\right) \end{cases}$			
Módulo	$\left\|G_{lag}(0)\right\| = 1$ $\left\|G_{lag}(0)\right\|_{\mathrm{dB}} = 0$	$\left\|G_{lag}(j\omega_m)\right\| = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{lag}}}$ $\left\|G_{lag}(j\omega_m)\right\|_{\mathrm{dB}} = 10\ \log(1 / \alpha_{lag})$	$\left\|G_{lag}(\infty)\right\| = \frac{1}{\alpha_{lag}}$ $\left\|G_{lag}(\infty)\right\|_{\mathrm{dB}} = 20\ \log(1 / \alpha_{lag})$
Fase	$\measuredangle G_{lag}(j\omega) = 0$	$\measuredangle G_{lag}(j\omega_m) = \Phi_m = \tan^{-1}\left(\frac{1-\alpha_{lag}}{2\sqrt{\alpha_{lag}}}\right)$	$\measuredangle G_{lag}(\infty) = 0$

Aunque las fórmulas del lead y el lag las mismas el funcionamiento de ambos compensadores son completamente distintos.

1) La columna central de la tabla anterior es la principal para un lead ya que es donde trabaja, en la región de la frecuencia ω_m donde se la hace coincidir con la frecuencia de cruce de ganancia del sistema $\omega_c^{'} = \omega_m$.

2) Para el lag las ecuaciones de la columna central, en la región de la frecuencia ω_m, no se utiliza nunca. Se diseñan para qué $\omega_c^{'}$ este por lo menos una década por arriba de ω_m, entonces $\omega_m << \omega_c^{'}$.

$$\left|G_{lag}(j\omega_m)\right| \approx \left|G_{lag}(0)\right| = 0$$

$$\measuredangle G_{lag}(j\omega_m) \approx \measuredangle G_{lag}(0) \approx \text{valor negativo pequeño}$$

$$\left|G_{lag}(j\omega_c^{'})\right| \approx \left|G_{lag}(\infty)\right| = 1 \,/\, \alpha_{lag}$$

$$\measuredangle G_{lag}(j\omega_c^{'}) \approx \measuredangle G_{lag}(\infty) \approx \text{valor negativo pequeño } (\approx -6^{\text{o}})$$

Observaciones:

- Debe verificarse que $\measuredangle G_{lag}(j\omega_c^{'})$ sea pequeño en el rango de frecuencias cercanas a la de cruce de ganancia.

- Si $\omega_c^{'} >> \omega_m$ es la frecuencia de cruce, se debe cumplir: $\left|L(j\omega_c^{'})\right| = \left|G_{lag}(j\omega_c^{'})\right|\left|K^{lag}G(j\omega_c^{'})\right| = 1$ se verifica que:

$$\left|G_{lag}(j\omega_c^{'})\right| \approx \left|G_{lag}(\infty)\right| = 1 / \alpha_{lag} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{lag} = K^{lag}\left|G(j\omega_c^{'})\right|}$$

- El factor de amplificación del compensador de atraso α_{lag} interviene en la condición $\left|L(j\omega_c^{'})\right| = 1$ para fijar $\omega_c^{'}$ como la frecuencia de cruce del sistema.

● La localización exacta del cero y el polo no es crítica, a condición de que estén cerca del origen, y que el cociente $\alpha_{lag} = z_{lag} / p_{lag}$ sea igual al factor de multiplicación requerido de la constante de error estático de velocidad, por ejemplo, siempre adoptamos $z_{lag} = \omega_c^{'} / 10$ independientemente del valor de $\omega_c^{'}$.

● El cero y el polo del compensador de retardo no deben estar innecesariamente cerca del origen para que la respuesta transitoria no sea muy lenta.

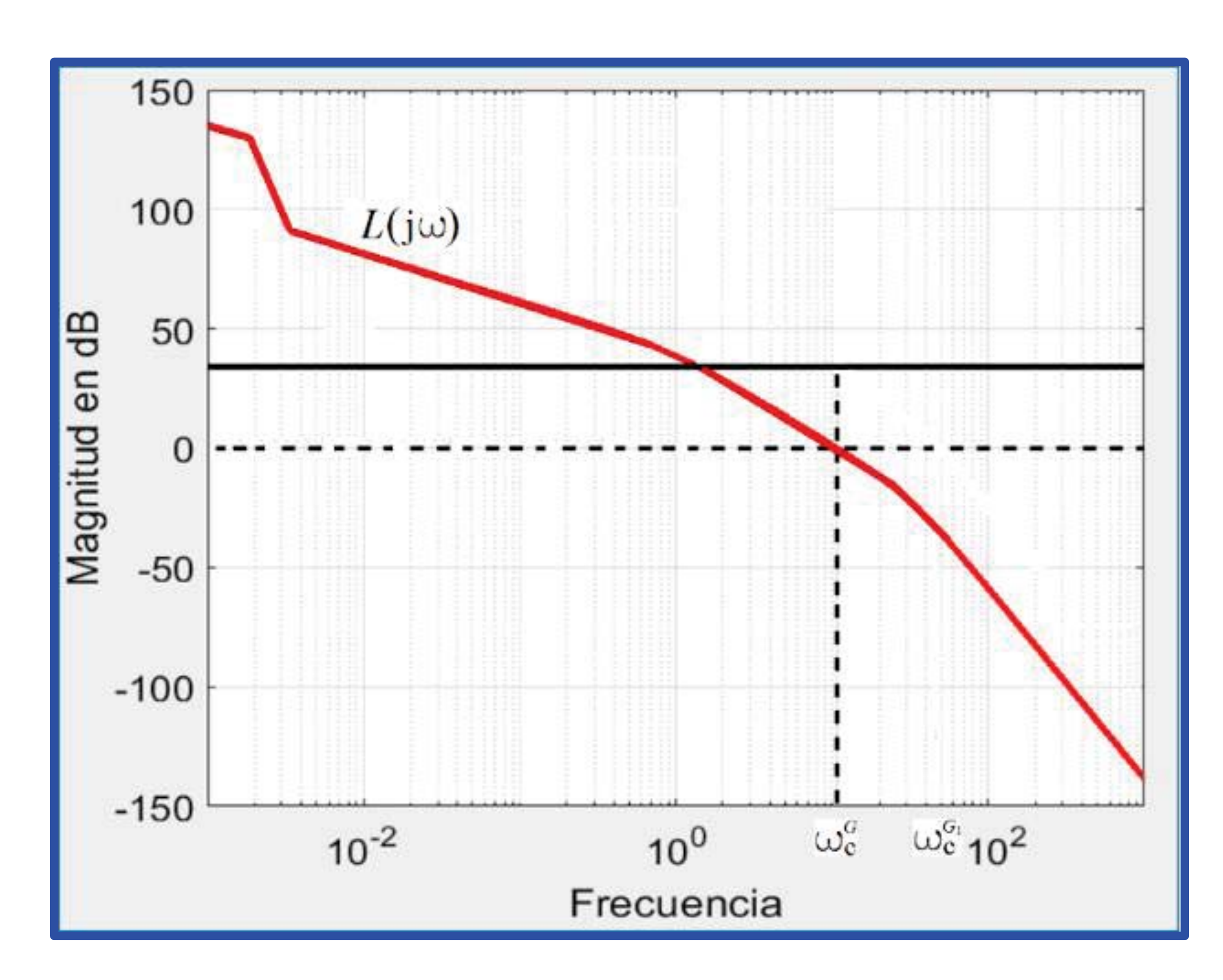
Tipos de redes de atraso de fase

Se tiene tres diseños distintos para incluir en el lazo de control un compensador de atraso de fase. Todos ellos utilizan la característica de atenuación de las altas frecuencias para satisfacer la especificación del error en régimen permanente vía la ganancia K_n y difieren en la segunda especificación de diseño.

Tipos de los compensadores de atraso de fase		
Compensador	**Datos de diseño**	**¿Qué hace?**
Diseño lag1	$G(j\omega)$ o $\lvert G(j\omega)\rvert$ y $\measuredangle G(j\omega)$ Especificación: K_n	Satisface la especificación K_n Deja invariantes $\overline{\phi}_L$ y $\omega_c^{'}$
Diseño lag2	$G(j\omega)$ o $\lvert G(j\omega)\rvert$ y $\measuredangle G(j\omega)$ Especificaciones: K_n y $\overline{\phi}_L$	Satisface las especificaciones K_n y $\overline{\phi}_L$ Disminuye $\omega_c^{'}$
Diseño lag3	$G(j\omega)$ o $\lvert G(j\omega)\rvert$ y $\measuredangle G(j\omega)$ Especificaciones: K_n y $\omega_c^{'}$	Satisface las especificaciones K_n y $\omega_c^{'}$ Incrementa $\overline{\phi}_L$

Diseño lag1 (la única especificación es K_n)

El compensador `lag1` se diseña con la especificación del error K_n **y ninguna especificación dinámica.** Es el mismo que vimos en el diseño con el lugar de las raíces, cuando ya se ha realizado la compensación en adelanto. para corregir los problemas con el transitorio, pero los errores de estado estacionario exceden los valores deseables. Entonces hay que incrementar la ganancia a baja frecuencia **sin modificar en forma notable la ganancia cerca de la frecuencia de cruce ω_c, de esta manera se modifica poco las características de la respuesta transitoria.** Esto mejora el régimen permanente sin incrementar el tipo del sistema.



Módulo y fase de $G_{lag}(j\omega)$ en $\omega_c^{'}$

El módulo de $G_{lag}(j\omega)$ en $\omega_c^{'}$ es aproximadamente $\left|G_{lag}(\infty)\right| = 1 / \alpha_{lag}$

ya que para $z_{lag} \leq \omega_c^{'} / 10$

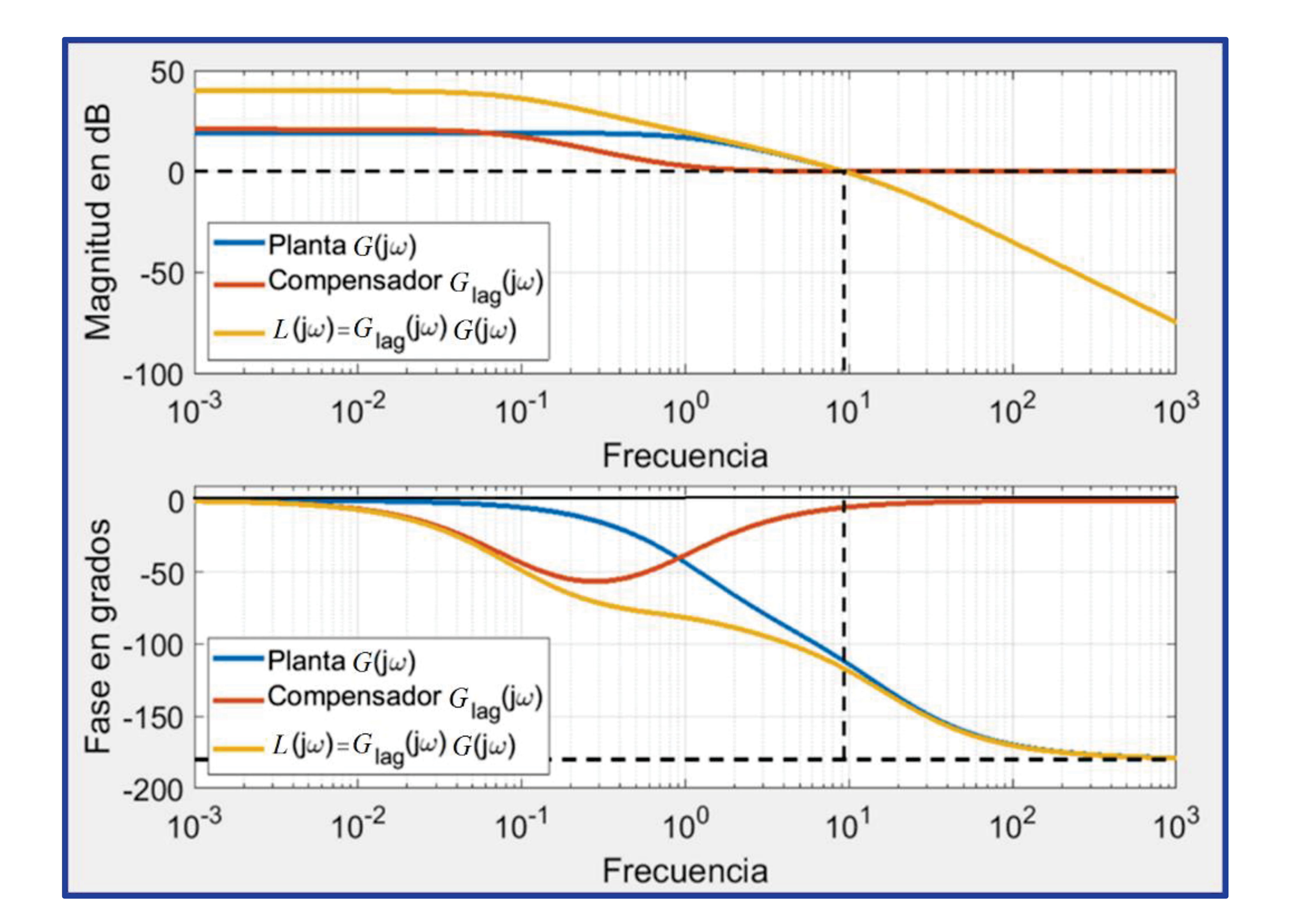
$$\left|G_{lag}(j\omega_c^{'})\right| = \sqrt{\frac{1+(\omega_c^{'} / z_{lag})^2}{1+(\omega_c^{'} / (z_{lag} / \alpha_{lag})^2}}\Bigg|_{z_{lag}=\omega_c^{'}/10} = \sqrt{\frac{1+100}{1+\alpha_{lag}{}^2 100}} \approx \frac{1}{\alpha_{lag}} = \left|G_{lag}(\infty)\right|$$

La de fase de $G_{lag}(j\omega)$ en $\omega_c^{'}$ es aproximadamente -5° ya que para

$z_{lag} \leq \omega_c^{'} / 10$

$$\measuredangle G_{lag}(j\omega_c^{'}) = \measuredangle\left[\frac{j\omega_c^{'} + z_{lag}}{j\omega_c^{'} + p_{lag}}\right]_{z_{lag}=\omega_c^{'}/10} = \measuredangle\left[\frac{j+1/10}{j+1/10\alpha_{lag}}\right]$$

$$= \underbrace{\measuredangle(1/10+j)}_{84{,}3^{o}} - \underbrace{\measuredangle(1/10\alpha+j)}_{\sim 90^{o}} \approx -6^{o}$$


50
0
-50
-100
Magnitud en dB
Planta $G(j\omega)$
Compensador $G_{lag}(j\omega)$
$L(j\omega) = G_{lag}(j\omega)\, G(j\omega)$
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frecuencia
0
-50
-100
-150
-200
Fase en grados
Planta $G(j\omega)$
Compensador $G_{lag}(j\omega)$
$L(j\omega) = G_{lag}(j\omega)\, G(j\omega)$
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frecuencia

Algoritmo de diseño lag o lag1

Supongamos que la planta $G(j\omega)$ cumple con todas las especificaciones dinámicas ($\bar{\phi}_G$ y ω_c^G), pero no satisface la especificación del error en régimen permanente (K_n).

Datos:

- La planta: $G(s)$ o los diagramas de Bode de magnitud $\left|G(j\omega)\right|$ y fase $\measuredangle G(j\omega)$.
- La especificación: K_n solamente ($\bar{\phi}_L \approx \bar{\phi}_G$ y $\omega_c^{'} \approx \omega_c^G$ deben permanecer aproximadamente constantes)

- **Paso 1)** Se determina la ganancia de Bode K^{lag} que satisface los requisitos sobre la constante de error estático K_n teniendo en cuenta que $G_c^*(0) = K^{lag}$.

$$K_n = \lim_{s \to 0} s^n G_{lag}^*(s) G(s) = \underbrace{G_{lag}^*(0)}_{K^{lag}} \underbrace{\lim_{s \to 0} s^n G(s)}_{K_n^G} = K^{lag} K_n^G$$

$$\boxed{K^{lag} = \frac{K_n}{K_n^G}}$$

- **Paso 2)** Se calcula α_{lag}. Como ω_c^G debe seguir siendo la frecuencia de cruce del sistema compensado con la red de atraso $\omega_c^{'}$ debe ser:

$$K^{lag}\left|G_{lag}(j\omega_c^G)\right|\underbrace{\left|G(j\omega_c^G)\right|}_{1}=1\Rightarrow\left|G_{lag}(j\omega_c^G)\right|=1\,/\,K^{lag}$$

Como se elegirá el cero muy alejado a la izquierda de $\omega_c^G\approx\omega_c^{'}$ $z_c\le\omega_c^G/10$ de la tabla de respuesta en frecuencia se tiene que:

$$\left|G_{lag}(j\omega_c^G)\right|\approx\left|G_{lag}(\infty)\right|=1\,/\,\alpha_{lag}$$

Reemplazando: $\left|G_{lag}(j\omega_c^G)\right|=1\,/\,\alpha_{lag}=1\,/\,K^{lag}\Rightarrow$ $\boxed{\alpha_{lag}=K^{lag}}$

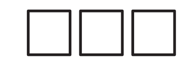
Entonces ahora $K^{lag}=\alpha_{lag}\,/\,K^{lag}=1$ y el compensador será de la forma $G_{lag}^{*}(s)=\dfrac{s+z_{lag}}{s+p_{lag}}$

- **Paso 3)** Se obtienen z_{lag} y p_{lag}

Se elige $z_{lag} \leq \omega_c^G / 10$ y se calcula $p_{lag} = z_{lag} / \alpha_{lag}$

El compensador de atraso es:

$$G_{lag}^{*}(s) = \frac{s + z_{lag}}{s + p_{lag}}$$



Algoritmo de diseño lag1 (versión simplificada)

Datos:

- La planta: $G(s)$ o los diagramas de Bode de magnitud $\left|G(j\omega)\right|$ y fase $\measuredangle G(j\omega)$.
- La especificación: K_n

> Como en este método de diseño del compensador de atraso siempre es $\alpha_{lag} = K^{lag}$ y $K_c = K^{lag} / \alpha_{lag} = 1$, no hace falta calcularlos. El diseño es entonces extremadamente simple.

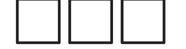
- **Paso 1)** Se determina la ganancia K^{lag} que satisface los requisitos sobre la constante

$$K_n = \lim_{s \to 0} s^n G^*_{lag}(s) G(s) = \underbrace{G^*_{lag}(0)}_{K^{lag}} \underbrace{\lim_{s \to 0} s^n G(s)}_{K_n^G} = K^{lag} K_n^G$$

$$\boxed{K^{lag} = \frac{K_n}{K_n^G}}$$

- **Paso 2)** Se obtienen z_{lag} y p_{lag}, se elige $z_{lag} = \omega_c^G / 10$ y se calcula $p_{lag} = \omega_c^G / 10K^{lag}$

Entonces el compensador es: $$\boxed{G^*_{lag}(s) = \frac{s + z_{lag}}{s + p_{lag}}}$$



Ejemplo

Datos: Consideremos la planta:

$$G(s) = \frac{180}{s^2 + 18s + 20} = \frac{180}{(s+16.81)\,(s+1.19)}$$

Esta planta tiene un margen de fase $\bar{\phi}_L = 68.35^{\text{o}}$ y una frecuencia de cruce por 0 dB $\omega_c^L = 9.3\,\text{rad/seg}$ que se consideran aceptables. Sin embargo, el error en el estado estacionario de la planta a lazo cerrado $G_{cl}(j\omega) = G(j\omega)\,/\,(1 + G(j\omega))$ ante una entrada escalón es $e_{ss}\% = 10\%$, lo cual es excesivo.

Se desea diseñar un compensador de atraso para que el error sea igual o inferior al 1% ($e_{ss}\% \leq 1\%$).

Especificación del error:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_0} \Rightarrow K_0 = \frac{1-e_{ss}}{e_{ss}} = \frac{1-0.01}{0.01} = 99$$

Paso 1) Se calcula $K = \dfrac{K_0}{K_0^L} = \dfrac{99}{\mathrm{dcgain(L)}} = 11$

Paso 2) Se calcula $\alpha_{lag} = K = 11$

Paso 3) Se obtienen $z_{lag} = \omega_c^{L_{comp}} / 10 = 0.93$ y

$p_{lag} = z_{lag} / \alpha_{lag} = 0.085$

El compensador de atraso es:

$$G_{lag}^{*}(s) = \frac{s+0.93}{s+0.085}$$

$$L(j\omega) = G_{lag}^{*}(j\omega)G(j\omega) = \frac{180\ (s+0.93)}{(s+0.085)\ (s+1.19)\ (s+16.81)}$$

El margen de fase del sistema compensado $L(j\omega)$ es: $\bar{\phi}_{L_{comp}} = 63.06^o$ (el margen de fase se ha deteriorado un poco debido a los aproximadamente -5º del compensador de atraso de fase en la frecuencia de cruce $\omega_c^{'}$ cuando el cero se ubica en $\omega_c^{'} / 10$).

La frecuencia de cruce del sistema compensado es:

$$\omega_c^{L_{comp}} = 9.3\,\text{rad/seg}$$

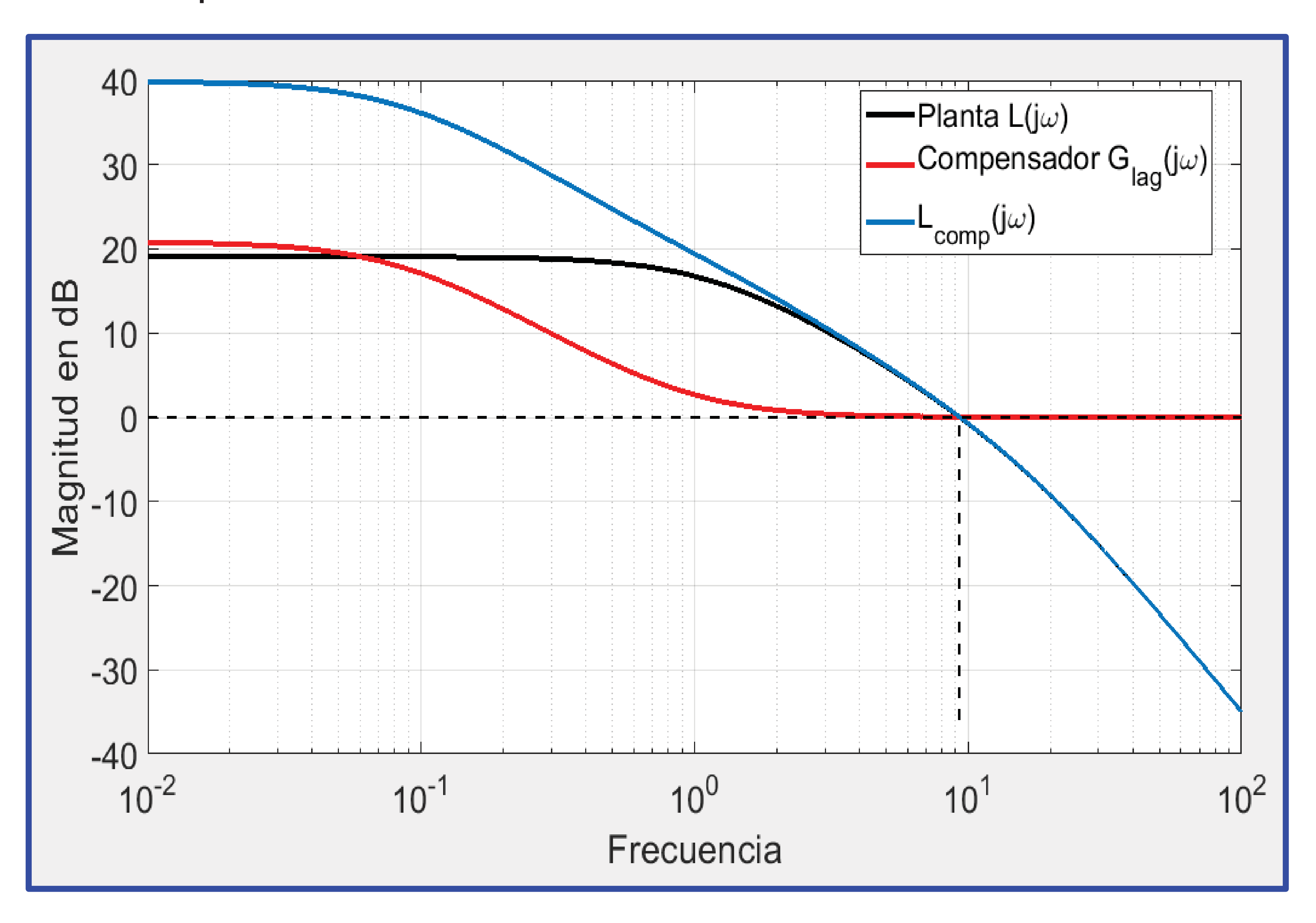
El error a una entrada rampa de $T_{comp}(s)$ es: 0.010

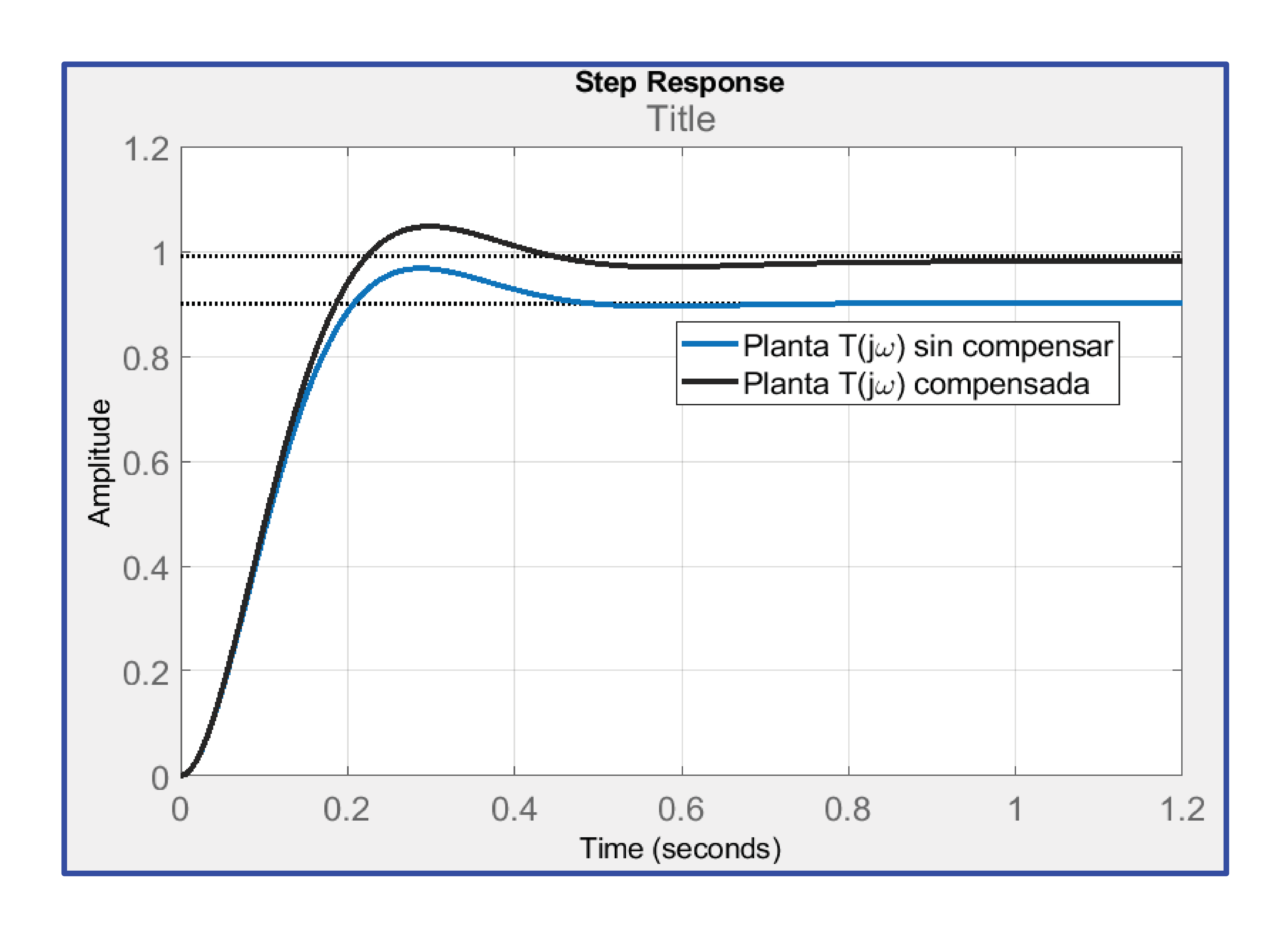
Se concluye que se ha logrado el objetivo de tener un error del 1% sin deteriorar mucho el margen de fase y la frecuencia de cruce.

Resultados del ejemplo

```
LAS CARACTERÍSTICAS OBTENIDAS CON EL DISEÑO SON:
La ganancia K0 del error estático especificada es = 99
La ganancia K0 del sistema compensado es          = 99
El error estático para una entrada escalón es     = 0.01
La frecuencia de cruce de la planta G(jw) es      = 9.29 rad/seg
La frecuencia de cruce de L(jw) es                = 9.33 rad/seg
El margen de fase de la planta G(jw) es           = 68.36 º
El margen de fase de L(jw) es                     = 63.06º
La sobreelongación de la planta G(jw) es          = 7.49%
La sobreelongación de L(jw) es                    = 7.49%
El ancho de banda de la planta G(jw) es           = 15.53 rad/seg
El ancho de banda de L(jw) es                     = 15.53 rad/seg
La fase de Glag en wc_L al final del diseño es    = -5.17 grados
```

Se modifica la ganancia en la zona de baja frecuencias permitiendo que error permanente disminuya al mismo tiempo que se modifica poco en la zona de la frecuencia de cruce.





Step Response
Title
Amplitude
Time (seconds)
Planta T(jω) sin compensar
Planta T(jω) compensada
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

Diseños lag2 y lag3 – Se utilizan como amplificadores de baja frecuencia y compensadores dinámicos

En el diseño `lag1` se necesitaba una red de atraso de fase para mejorar la ganancia en la zona de baja frecuencia, modificando lo menos posible la ganancia y la fase en la zona de la frecuencia de cruce de ganancia. Esto significa que el compensador `lag1` actúa como un mero amplificador de baja frecuencia.

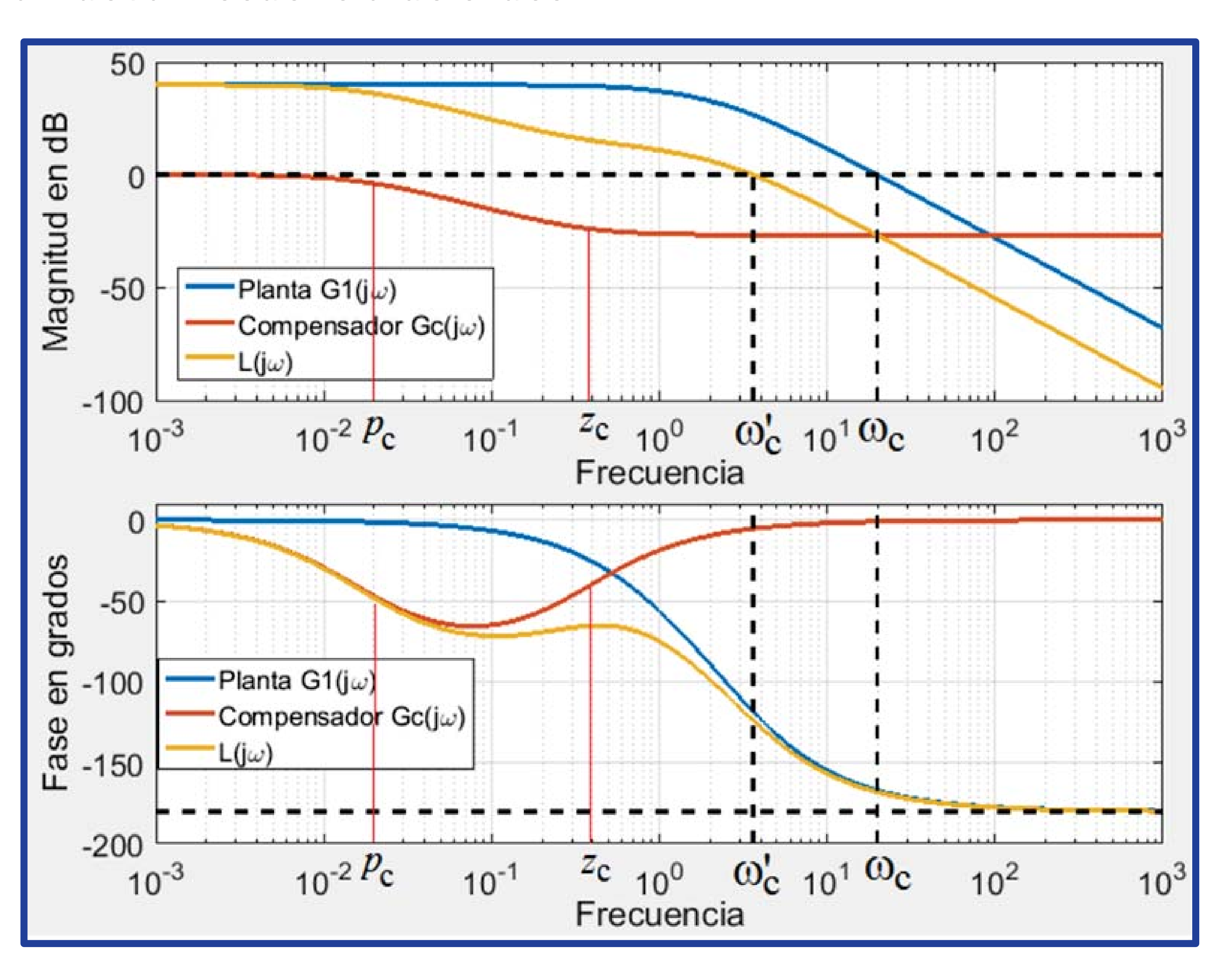
Las redes de atraso de fase se utilizan fundamentalmente como verdaderos compensadores dinámicos, esto es, se diseñan no solamente para incrementar la ganancia en continua ya vista en el diseño `lag1` sino también para incrementar la estabilidad del sistema. Esto se logra disminuyendo la frecuencia de cruce del sistema compensado, disminuyendo la frecuencia de cruce de ganancia $\omega_c^{'} = \omega_c^{L} < \omega_c = \omega_c^{G}$ (o el ancho de banda del sistema a lazo cerrado). Los diseños `lag2` y `lag3` actúan de esta manera, incrementan la ganancia en continua e incrementan la estabilidad del sistema.

Diseño lag2 (las especificaciones son K_n y $\bar{\phi}_L$)

En el diseño `lag2` las especificaciones son el error en estado estacionario mediante K_n y el margen de fase $\bar{\phi}_L$ (normalmente es mayor que el de la planta sin compensar $\bar{\phi}_L > \bar{\phi}_G$), esto produce que **la frecuencia de cruce del sistema compensado sea menor que la frecuencia de cruce del sistema sin compensar**. En este diseño no se especifica explícitamente la frecuencia de cruce $\omega_c^{'}$ aunque se sabe que $\omega_c^{'} = \omega_c^L < \omega_c = \omega_c^G$.

Este diseño se utiliza en aplicaciones donde importa la estabilidad y el error en estado estacionario y no importa tanto que disminuya la velocidad o ancho de banda (el beneficio de un menor ancho de banda es la reducción de la sensibilidad al ruido, perturbaciones de alta frecuencia y menores acciones de control $u(t)$).

En el diseño `lag2` el objetivo del compensador de atraso es mover la frecuencia de cruce ω_c de $G_1(j\omega)$ a una frecuencia ω_c' menor que permita obtener el margen de fase deseado, manteniendo la curva de fase del diagrama de Bode relativamente sin cambios en la zona de la nueva frecuencia de cruce.



Algoritmo de diseño lag2

Datos:

- La planta: $G(s)$ o los diagramas de Bode de magnitud $\left|G(j\omega)\right|$ y fase $\measuredangle G(j\omega)$.

- Las especificaciones: la ganancia estática del error K_n y el margen de fase $\overline{\phi}_L$.

El procedimiento para diseñar una red de atraso de fase utilizando la función de transferencia $G(j\omega)$ o los diagramas de Bode de magnitud $\left|G(j\omega)\right|$ y fase $\measuredangle G(j\omega)$ es el siguiente:

- **Paso 1)** Se determina la ganancia de Bode K^{lag} que satisface los requisitos sobre la constante de error estático K_n.

$$K_n = \lim_{s\to 0} s^n G^*_{lag}(j\omega) G(s) = \underbrace{G^*_{lag}(0)}_{K^{lag}} \underbrace{\lim_{s\to 0} s^n G(s)}_{K_n^G} = K^{lag} K_n^G$$

$$\boxed{K^{lag} = \frac{K_n}{K_n^G}}$$

- **Paso 2)** Se define $\boxed{G_1(s) = K^{lag} G(s)}$

El diseño siempre se realiza con $G_1(s)$ en vez de $G(s)$, de esta forma nos aseguramos que se cumple la especificación del error estacionario.

- **Paso 3)** Se determina la frecuencia de cruce $\omega_c^{'} < \omega_c^{G_1}$ de $L(j\omega)$

Se debe encontrar la frecuencia de cruce $\omega_c^{'} < \omega_c^{G_1}$ de $L(j\omega) = G_{lag}(j\omega)G_1(j\omega)$ en la cual el margen de fase del sistema compensado coincide con el especificado $\bar{\phi}_L$.

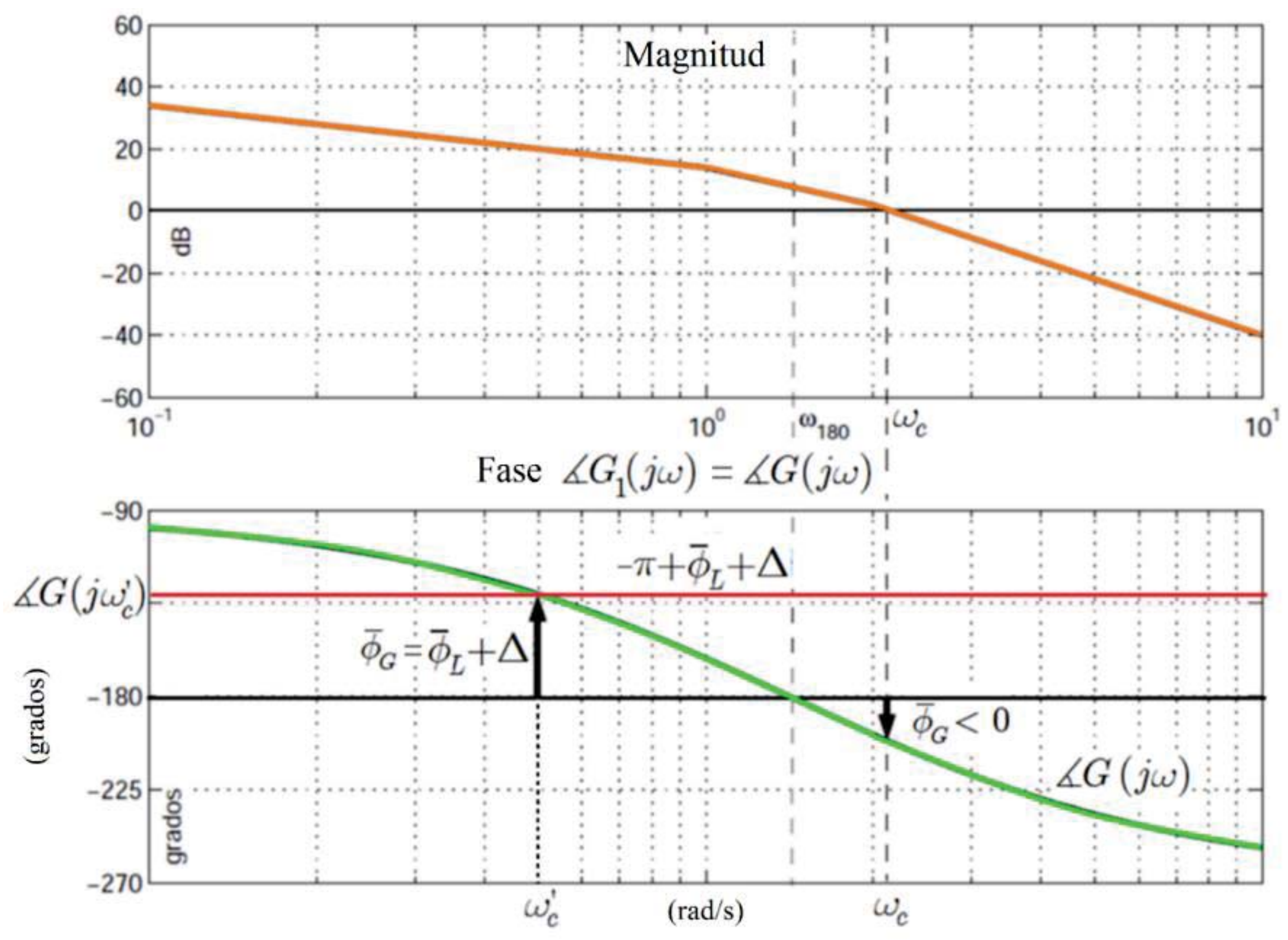
$$\bar{\phi}_L = \pi + \underbrace{\measuredangle L(j\omega_c^{'})}_{\measuredangle G_c(j\omega_c^{'}) + \measuredangle G_1(j\omega_c^{'})} = \pi + \measuredangle G_c(j\omega_c^{'}) + \measuredangle G_1(j\omega_c^{'}) \quad (*)$$

Debido a que $z_c \ll \omega_c^{'}$ se tiene que $\measuredangle G_c(j\omega_c^{'})$ es negativa y pequeña

$$\measuredangle G_c(j\omega_c^{'}) = -\Delta < 0\,, \quad \Delta \in [5^{\circ} \;\; 12^{\circ}]$$

Reemplazando en (*) y despejando: $\boxed{\measuredangle G(j\omega_c^{'}) = -\pi + \bar{\phi}_L + \Delta}$

Luego $\omega_c^{'}$ se obtiene en la intersección de $\measuredangle G(j\omega)$ con la recta $-\pi + \overline{\phi}_L + \Delta$.



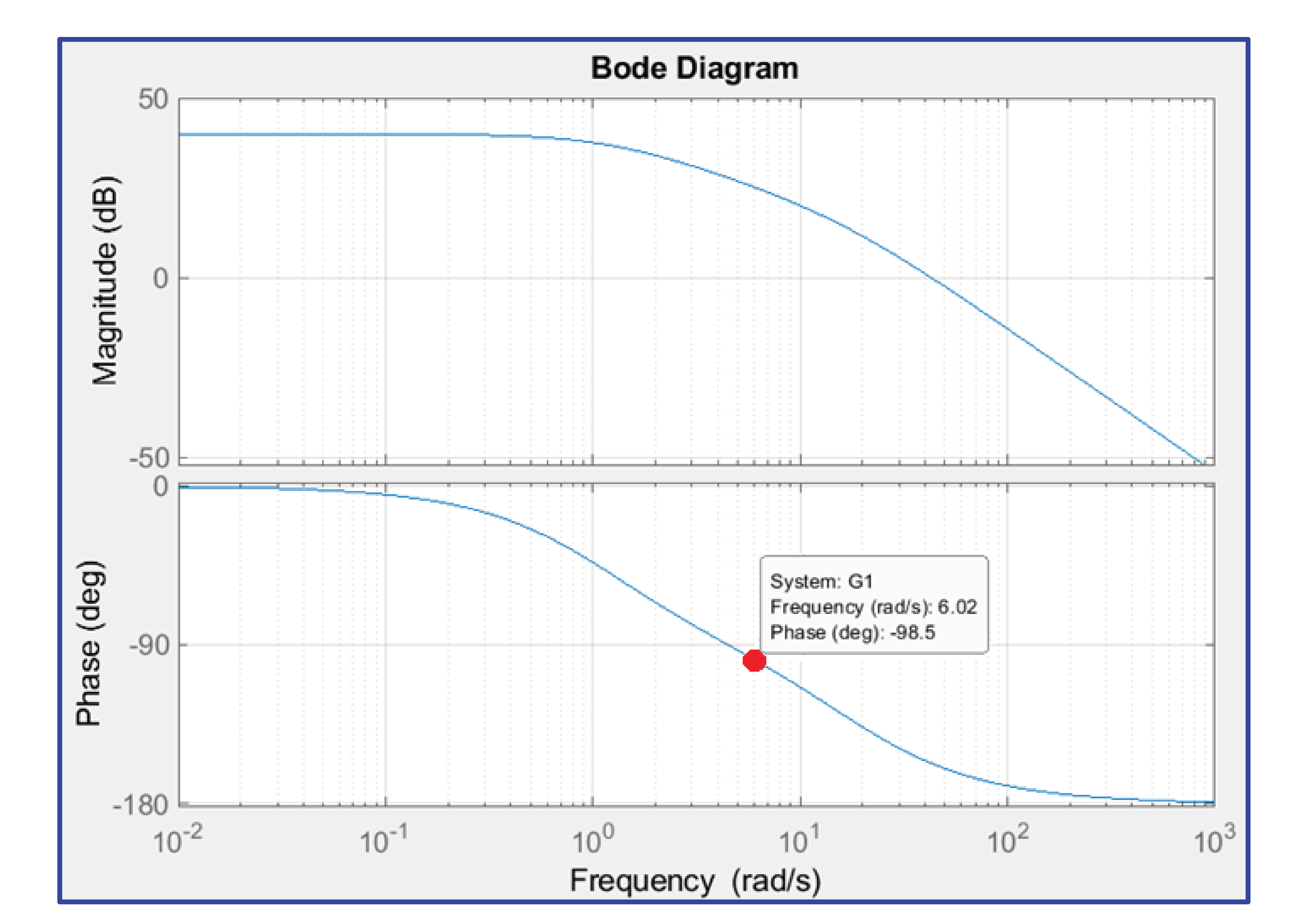
Algoritmo de diseño lag2 gráfico

Como este método de diseño clásico es esencialmente gráfico puede determinarse $\omega_c^{'}$ fácilmente con el gráfico de fase de Bode.

- Se calcula el valor de $-180^{o} + \bar{\phi}_L + \Delta$.

- Se grafica $\left|G_1(j\omega)\right|$ y $\measuredangle G_1(j\omega)$ con **bodeplot**(G1).

- Con el cursor se busca aproximadamente el valor de la frecuencia para la fase $-180^{o} + \bar{\phi}_L + \Delta$ (ver el ejemplo de la figura siguiente).


Bode Diagram
Magnitude (dB)
50
0
-50
Phase (deg)
0
-90
-180
System: G1
Frequency (rad/s): 6.02
Phase (deg): -98.5
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/s)

Cálculo computacional: Se puede calcular la nueva frecuencia de cruce $\omega_c^{'}$ con Matlab resolviendo la ecuación implícita:

$$\measuredangle G_1(j\omega) + \pi - \bar{\phi}_L - \Delta = 0$$

La cual se simboliza como:

$$\omega_c^{'} = \underset{\omega \in (0\ \omega_c)}{\text{sol}} \left[\measuredangle G_1(j\omega) + \pi - \bar{\phi}_L - \Delta = 0\right]$$

Esta ecuación se lee así: "$\omega_c^{'}$ es la frecuencia $\omega \in (0\ \omega_c)$ que es solución de la ecuación $\measuredangle G_1(j\omega) + \pi - \bar{\phi}_L - \Delta = 0$". Esta ecuación se puede resolver numéricamente por distintos métodos: Raphson-Newton, bisección, de la secante, regla falsa (*regula falsi*), búsqueda exhaustiva o "fuerza bruta", etc.

La scrip siguiente la resuelve por búsqueda exhaustiva ya que la ecuación es muy simple y no lleva más que unos pocos segundos.

```
% Definidos G1, MF, DELTA se calcula la frecuencia de cruce del
% sistema compensado, MF es el margen de fase especificado
% Búsqueda por fuerza bruta
cota_del_error = 0.1; delta_w =0.001; error = inf;
[~,~,~,wc] = margin(G1); w = wc;
while abs(error) > cota_del_error && wc_new>.001
  [~,fase_G1] = bode(G1,wc_new); error = fase_G1 + (180-MF-DELTA);
  wc_new = wc_new - delta_w;
end  % while
```

Como alternativa, la siguiente script resuelve la búsqueda mediante el método de Raphson-Newton, la convergencia es muy rápida y con una cota de error muy pequeña.

```
% Búsqueda mediante Raphson-Newton
[~,~,~,wc]=margin(G1); wc_L = wc; % Se inicializa la búsqueda de
                                  % wc_L en wc
delta = eps*1e3; mu = 1e-1; error=inf; cota_error=1e-6; DELTA=5;
while abs(error)>cota_error && wc_L>.001
  [modG1,faseG1]=bode(G1,wc_L);[dmodG1,dfaseG1]=bode(G1,wc_L-
delta);
  error = faseG1+(180-MF-DELTA); derror = dfaseG1+(180-MF-DELTA);
  deriv_error=(error-derror)/delta;
  wc_L=wc_L-mu*error/deriv_error; % x(n+1)=x(n)-f(x(n))/f'(x(x))
end % while
```

- **Paso 4)** Se determina $\alpha_{lag} = z_{lag} \,/\, p_{lag}$

En el paso anterior se determinó la frecuencia de cruce $\omega_c^{'}$ para cumplir con la especificación del margen de fase $\overline{\phi}_L$. Para que $\omega_c^{'}$ sea la frecuencia de cruce de $L(j\omega)$ se debe verificar que $\left|L(j\omega_c^{'})\right| = 1$, entonces, **se debe determinar la atenuación necesaria para llevar la curva de magnitud de $L(j\omega)$ a 0 dB en la frecuencia de cruce de ganancia $\omega_c^{'}$.**

El polo y el cero del compensador deben localizarse muy por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia $\omega_c^{'}$. Así como antes se adopta:

$z_{lag} = \omega_c^{'} / 10$ o en el rango $z_{lag} \in \left[\omega_c^{'} / 10\sqrt{10} \ , \ \omega_c^{'} / 10 \right]$.

Si se eligen valores menores el sistema se vuelva muy lento por la cercanía del polo p_{lag} al origen).

Entonces $\left| G_{lag}(j\omega_c^{'}) \right| \approx G_{lag}(\infty) = 1 / \alpha_{lag}$.

$$\left| L(j\omega_c^{'}) \right| = \left| G_{lag}(j\omega_c^{'}) G_1(j\omega_c^{'}) \right| = \underbrace{\left| G_{lag}(j\omega_c^{'}) \right|}_{1/\alpha_{lag}} \left| G_1(j\omega_c^{'}) \right| = 1$$

$$\boxed{\alpha_{lag} = \left| G_1(j\omega_c^{'}) \right|}$$

- **Paso 5)** Se determinan z_{lag} y p_{lag}

Se elige:

$$z_{lag} = \omega_c^{'}/10$$

y se calcula

$$p_{lag} = z_{lag} \;/\; \alpha_{lag} = \omega_c^{'}/10\left|G_1(j\omega_c^{'})\right|$$

El compensador de atraso es:

$$G_{lag}^{*}(s) = K^{lag}\frac{(s \;/\; z_{lag} + 1)}{(s \;/\; p_{lag} + 1)} = \frac{K^{lag}}{\alpha_{lag}}\frac{(s + z_{lag})}{(s + p_{lag})} = K_c^{lag}\frac{(s + z_{lag})}{(s + p_{lag})}$$

□□□

Ejemplo

Datos: La misma planta del ejemplo anterior:

$$G(s) = \frac{180}{s^2 + 18s + 20} = \frac{180}{(s + 16.81)\,(s + 1.19)}$$

Esta planta tiene un margen de fase $\bar{\phi}_G = 68.35^{\mathrm{o}}$, una frecuencia de cruce $\omega_c^G = 9.3\,\mathrm{rad/seg}$, y el error en estado estacionario ante una entrada escalón del sistema a lazo cerrado $G_{cl}(s) = G(s)\,/\,(1 + G(s))$ es $e_{ss}\% = 10\%$.

Como en el ejemplo anterior, se desea diseñar un compensador de atraso para disminuir el error al 1% o menos ($e_{ss}\% \leq 1\%$). Pero con el sistema compensado trabajando a la máxima velocidad posible sin sobreelongación.

Especificación del error:

$$e_{ss} = 1/1 + K_0 \Rightarrow K_0 = (1 - e_{ss})/e_{ss} = (1 - 0.01)/0.01 = 99$$

Especificación de estabilidad ($\overline{\phi}_L$): Debemos explicitar la especificación del margen de fase $\overline{\phi}_L$ para cumplir con el objetivo de diseño. Lo que se pide es un sistema con amortiguamiento crítico (sistema de segundo orden con el par de polos reales y dobles).

de $\%O_S = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100$, $\%O_S = 0 \Rightarrow \zeta = 1$

Se calcula $\overline{\phi}_L$ para $\zeta = 1$ con: $\overline{\phi}_L = \tan^{-1}\left(2\sqrt{2\zeta^4 + \zeta^2\sqrt{4\zeta^4 + 1}}\right) \Rightarrow$

$\overline{\phi}_L = 76.35^{o}$

- **Paso 1)** Se determina la ganancia de Bode

$$K^{lag} = K_n \, / \, K_n^G = \text{K0/dcgain}\ \ \text{G} \ = 11$$

- **Paso 2)** Se define $G_1(s) = K^{lag} G(s)$

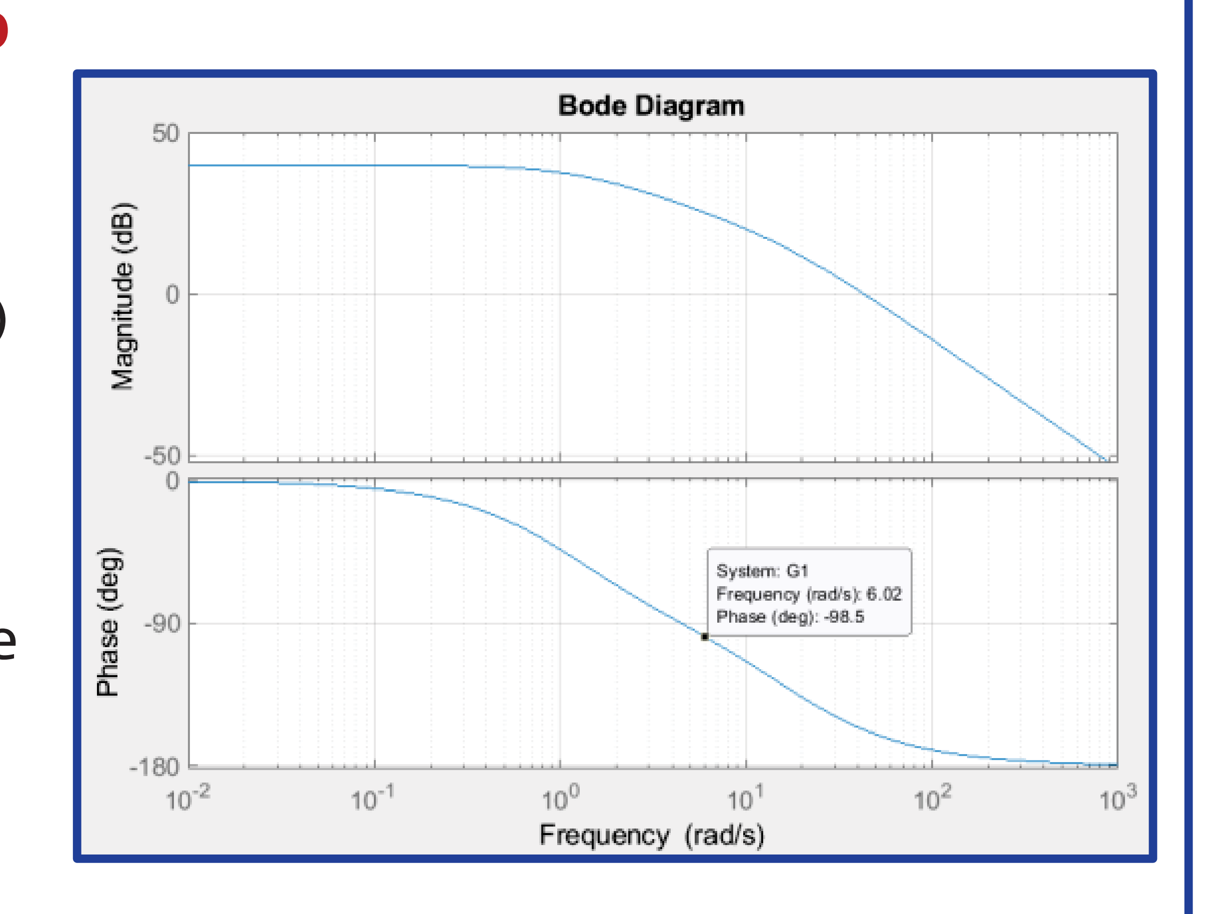
- **Paso 3)** Se determina la frecuencia de cruce $\omega_c^{'} < \omega_c^{G_1}$ de $L(j\omega)$

Opción 1) Método gráfico

- Se calcula el valor de -180+MF+DELTA = -98.65º

- Se grafica con **bodeplot**(G1)

- Con el cursor se busca aproximadamente el valor de la frecuencia para la fase -98.65º (ver la figura) se lee la frecuencia $\omega_c^{'}$ = 6.02 rad/seg.



Opción 2) Método computacional

Con la rutina de búsqueda se obtiene $\omega_c^{'} = 6.077\,\mathrm{rad/seg}$. Se observa que prácticamente es el mismo valor hallado gráficamente.

- **Paso 4)** Se determina $\alpha_{lag} = z_{lag} / p_{lag} = |G_1(j\omega_c^{'})| \approx 18$

```
[mod_G1,~]=bode(G1,wc_L);  alpha_lag=mod_G1;
```

- **Paso 4)** Se calculan z_{lag} y p_{lag}.

Se antes se elige $z_{lag} = \omega_c^{'}/10 \approx 0.6$ y se calcula

$p_{lag} = z_{lag} / \alpha_{lag} \approx 0.034$

El compensador resultante es:

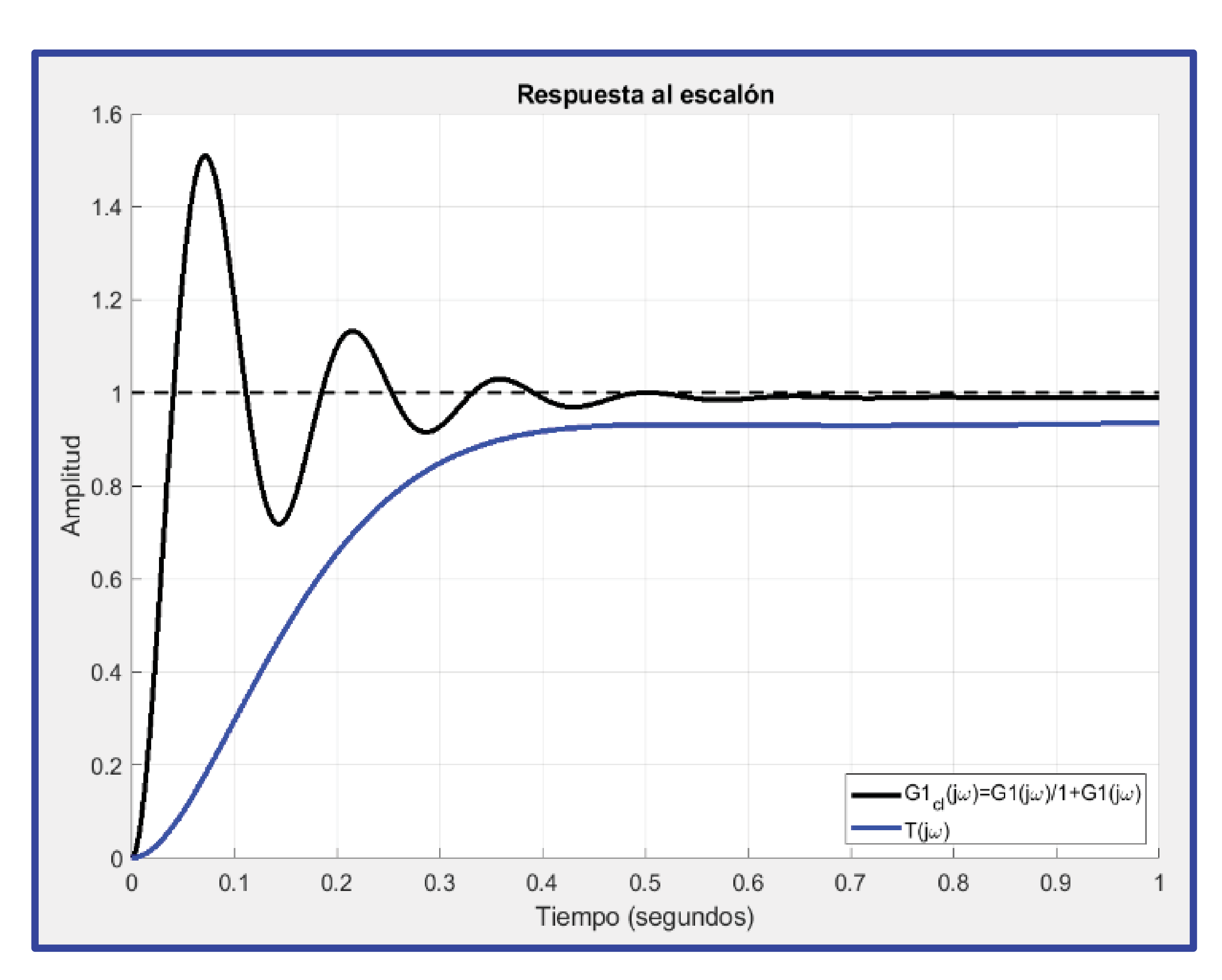
$$G_{lag}(s) = \frac{1}{\alpha_{lag}} \frac{(s + z_{lag})}{(s + p_{lag})} \approx \frac{0.054 \quad s + 0.58}{(s + 0.031)}$$

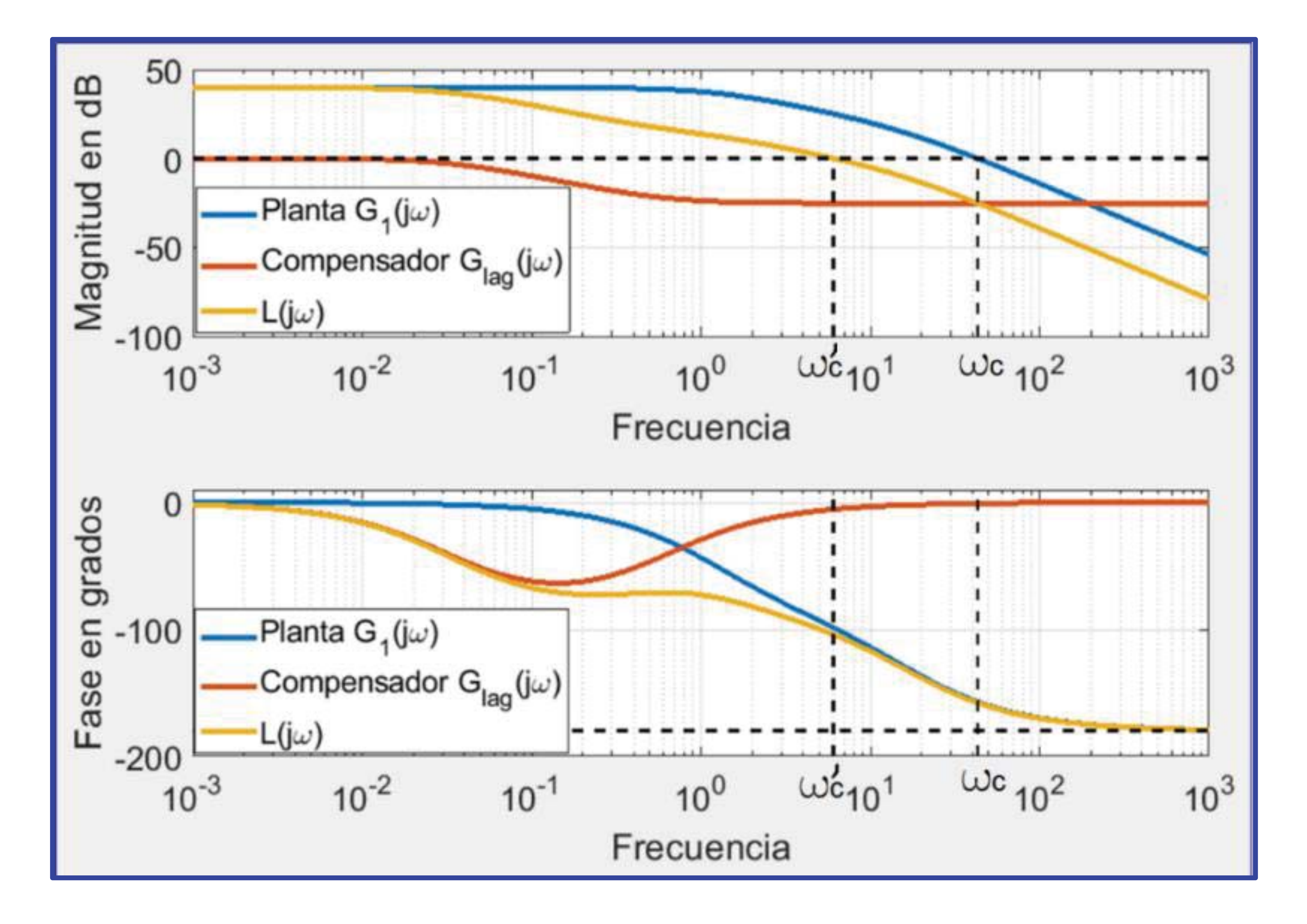
Resultados del ejemplo

La tabla siguiente da los valores de los parámetros y características obtenidas.

```
LAS CARACTERÍSTICAS OBTENIDAS CON EL DISEÑO SON:
La ganancia K0 especificado es               = 99
La ganancia K0 de L(jw) es                   = 99
El error en estado estacionario es           = 0.01
La frecuencia de cruce de G1(jw) es          = 42.93 rad/seg
La frecuencia de cruce de L(jw) es           = 6.077 rad/seg
La sobreelongación de Gcl(jw) es             = 7.4862 %
La sobreelongación de L(jw) es               = 0 %
El margen de fase de la planta G1(jw) es     = 22.97 grados
El margen de fase especificado es            = 76.35 grados
El margen de fase de L(jw) es                = 75.83 grados
La fase de Glag(jw) en wc_L es               = -5.38 grados
```

Se observa en la tabla que se cumple con las especificaciones. La respuesta al escalón muestra que el sistema compensado no tiene sobre sobreelongación y llega lentamente al error en estado estacionario requerido.





Magnitud en dB
50
0
-50
-100
Planta $G_1(j\omega)$
Compensador $G_{lag}(j\omega)$
$L(j\omega)$
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
ω_c'
10^{1}
ω_c
10^{2}
10^{3}
Frecuencia
Fase en grados
0
-100
-200
Planta $G_1(j\omega)$
Compensador $G_{lag}(j\omega)$
$L(j\omega)$
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
ω_c'
10^{1}
ω_c
10^{2}
10^{3}
Frecuencia

Observar que en la zona de baja frecuencia la influencia del compensador de atraso es pequeña ya que la planta $G_1(j\omega)$ ya tiene la ganancia necesaria para cumplir con la especificación del error permanente.

A la frecuencia $\omega_c^{'}$ el compensador "baja" la curva de magnitud de la planta $G_1(j\omega_c^{'})$ para que el sistema compensado pase a esa frecuencia por 0 dB (frecuencia de cruce del sistema compensado). Se observa también como era previsible que a la misma frecuencia $\omega_c^{'}$ la fase del compensador de atraso es pequeña (esto es porque el cero esta una década alejado hacia la izquierda).

■■■

Importante: En la sección siguiente veremos el diseño lag3, veremos que es mucho más sencillo que el lag2 ya que se obtiene directamente sin realizar ninguna búsqueda. Esto nos permitirá diseñar lag2 a partir de lag3 como se hizo antes para obtener lead2 y lead3 a partir de lead1.

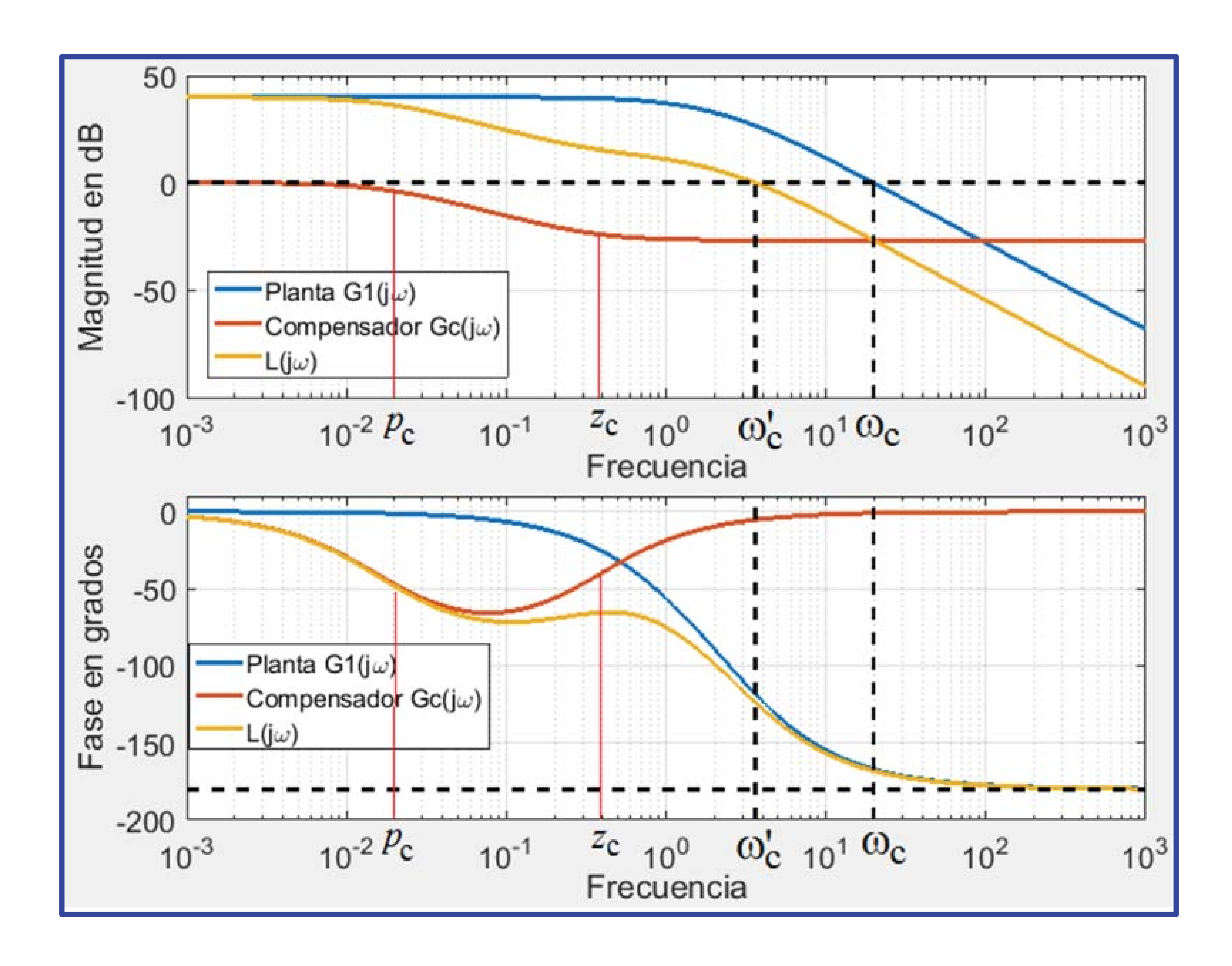
Diseño lag3 (las especificaciones son K_n y $\omega_c^{'}$)

En el diseño lag3 las especificaciones son K_n y $\omega_c^{'} < \omega_c^{G_1}$ (debe ser menor que la frecuencia de cruce de $G_1(j\omega)$).

En este diseño no se especifica el margen de fase del sistema compensado $\bar{\phi}_L$ pero se sabe que es mayor que el de la planta sin compensar $\bar{\phi}_L > \bar{\phi}_{G1}$ por ser $\omega_c^{'} < \omega_c^{G_1}$. Entonces pese a no tener el control del valor que toma $\bar{\phi}_L$ al final del diseño **no existe riesgo de disminuir la estabilidad relativa ya que** $\bar{\phi}_L > \bar{\phi}_{G1}$.

Este diseño se utiliza en aplicaciones donde se quiere disminuir el error en estado estacionario y ajustar la frecuencia de cruce a un valor $\omega_c^{'} < \omega_c^{G_1}$ determinado, verificando que la estabilidad relativa del sistema $\bar{\phi}_L$ sea aceptable (recordar que al ser $\omega_c^{'} < \omega_c^{G_1}$ se tiene que $\bar{\phi}_L > \bar{\phi}_{G1}$.

En el diseño **lag3** el objetivo del compensador de atraso es mover la frecuencia de cruce ω_c de $G_1(j\omega)$ a una frecuencia $\omega_c^{'}$ menor que permita obtener el margen de fase mayor manteniendo la curva de fase del diagrama de Bode relativamente sin cambios en la zona de la nueva frecuencia de cruce (ver la figura siguiente que es idéntica a la vista en lag2).



50
0
-50
-100
Magnitud en dB
Planta G1(jω)
Compensador Gc(jω)
L(jω)
10-3
10-2
p_c
10-1
z_c
100
ω'_c
101
ω_c
102
103
Frecuencia
0
-50
-100
-150
-200
Fase en grados
Planta G1(jω)
Compensador Gc(jω)
L(jω)
10-3
10-2
p_c
10-1
z_c
100
ω'_c
101
ω_c
102
103
Frecuencia

Algoritmo de diseño lag3

Datos:

- La planta: $G(s)$ o $\left|G(j\omega)\right|$ y $\measuredangle G(j\omega)$.

- Las especificaciones: K_n y $\omega_c^{'}$.

- **Paso 1)** Se determina la ganancia de Bode K^{lag}

$$K_n = \lim_{s \to 0} s^n G_{lag}^{*}(j\omega)\,G(s) = \underbrace{G_{lag}^{*}(0)}_{K^{lag}} \; \underbrace{\lim_{s \to 0} s^n G(s)}_{K_n^G} = K^{lag}\, K_n^G$$

$$\boxed{K^{lag} = \frac{K_n}{K_n^G}}$$

- **Paso 2)** Se define como antes $G_1(s) = K^{lag} G(s)$

- **Paso 3)** Se determina $\alpha_{lag} = z_{lag} / p_{lag}$:

Por ser $\omega_c^{'}$ la frecuencia de cruce de ganancia se cumple que:
$$\left|L(j\omega_c^{'})\right| = \left|G_{lag}(j\omega_c^{'})G_1(j\omega_c^{'})\right| = 1$$

$$\left|G_{lag}(j\omega_c^{'})\right| \approx G_{lag}(\infty) = 1 / \alpha_{lag}$$

$$\left|L(j\omega_c^{'})\right| = \left|G_{lag}(j\omega_c^{'})G_1(j\omega_c^{'})\right| = \underbrace{\left|G_{lag}(j\omega_c^{'})\right|}_{1/\alpha_{lag}}\left|G_1(j\omega_c^{'})\right| = 1 \Rightarrow$$

$$\alpha_{lag} = \left|G_1(j\omega_c^{'})\right|$$

Como ahora se conoce $\omega_c^{'}$ es inmediato el cálculo de α_{lag}

- **Paso 4)** Se calculan z_{lag} y p_{lag}

Se antes se elige:

$$z_{lag} = \omega_c^{'} / 10$$

y se calcula:

$$p_{lag} = z_{lag} \,/\, \alpha_{lag} = \omega_c^{'} / 10 \left| G_1(j\omega_c^{'}) \right|$$

El compensador de atraso es:

$$G_{lag}^{*}(s) = \frac{K^{lag}}{\alpha_{lag}} \frac{(s + z_{lag})}{(s + p_{lag})} = K_c^{lag} \frac{(s + z_{lag})}{(s + p_{lag})}$$

□□□

Ejemplo (continuación)

Para la planta de los ejemplos anteriores:

$$G(s) = \frac{180}{s^2 + 18s + 20} = \frac{180}{(s + 16.81)\ (s + 1.19)}$$

El diseño **lag2** para las especificaciones $K_0 = 99$ y $\bar{\phi}_L = 76.35^o$ dio como resultado la nueva frecuencia de cruce de ganancia $\omega_c^{'} = 5.8683 \text{rad/seg}$ y el compensador resultante:

$$G_{lag2}(s) = \frac{1}{\alpha_{lag}} \frac{(s + z_{lag})}{(s + p_{lag})} \approx \frac{0.054\ \ s + 0.58}{(s + 0.031)}$$

Con los siguientes resultados que muestran que se cumplió con las especificaciones del problema.

```
LAS CARACTERÍSTICAS OBTENIDAS CON EL DISEÑO SON:
La ganancia K0 especificado es                = 99
La ganancia K0 de L(jw) es                    = 99
La frecuencia de cruce de la planta G1 es     = 42.93 rad/seg
La frecuencia de cruce de L(jw) es            = 6.077 rad/seg
El margen de fase de la planta G1(jw) es      = 22.97 grados
El margen de fase especificado es             = 76.35 grados
El margen de fase de L(jw) es                 = 75.83 grados
```

Si ahora realizamos el diseño **lag3** para las especificaciones $K_0 = 99$ y la frecuencia de cruce obtenida en el diseño **lag2** $\omega_c^{'} = 5.8683 \text{rad}/\text{seg}$ se obtiene el margen de fase

$\bar{\phi}_L = 76.35^{\circ}$ y prácticamente el mismo compensador del diseño **lag2**.

$$G_{lag}(s) = \frac{1}{\alpha_{lag}} \frac{(s + z_{lag})}{(s + p_{lag})} \approx \frac{0.054 \quad s + 0.59}{(s + 0.032)}$$

Obviamente los resultados que se obtienen son los mismos del diseño **lag2** que muestran la tabla anterior.

■■■

Como se observó al final del tema **lag2**, el diseño **lag3** por ser mucho más sencillo que el diseño **lag2**, permite desarrollar una estrategia similar a la que vimos en los diseños **lead2** y **lead3** utilizando **lead1**.

Es muy fácil diseñar lead2 utilizando lead3.

En la script siguiente se realiza el diseño **lead2** utilizando la function realizada para el diseño **lead3**.

```
% Diseño lag2 con function lag3_Bode_design
G=tf(180,[1 18 20]); % Planta
Kn=99; MF=76.35;     % Especificaciones
%##### DISEÑO LAG2 CON LAG3 ######
[~,MF_G,~,wc] = margin(G);
wc_L = wc;%Se inicializa la búsqueda con wc_L=wc
error=inf; cota_error=1e-5; mu=0.1;
while abs(error)>cota_error && wc_L>.001
     Glag=lag3_Bode_design(G,Kn,wc_L);
     K_lag=dcgain(Glag); G1=K_lag*G; L=minreal(Glag*G);
     [~,MF_G,~,~] = margin(L);
     error=MF-MF_G; wc_L=wc_L-mu*error;
end % while
```

Compensador proporcional-integral (PI)

El compensador proporcional-integral (PI) ya sabemos es un caso particular de la red de atraso de fase para $p_{lag} = 0$.

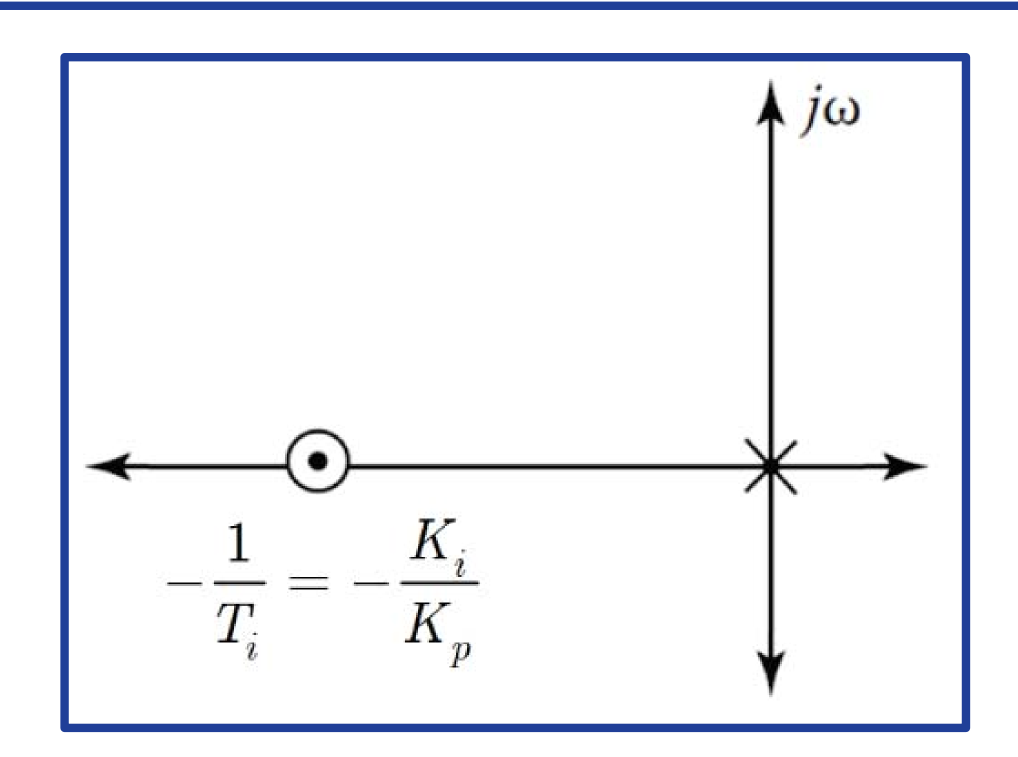
$$G_{\mathrm{PI}}(s) = K^{lag} \left. \frac{s + z_{lag}}{s + p_{lag}} \right|_{p_{lag}=0} = \frac{K_{\mathrm{P}}}{s}(s + z_{\mathrm{PI}})$$

Al compensador PI se lo puede parametrizar de distintas maneras:

$$G_{\mathrm{PI}}(s) = \frac{K_{\mathrm{P}}}{s}(s + z_{\mathrm{PI}}) = K_{\mathrm{P}} + \frac{K_{\mathrm{P}}}{T_i}\frac{1}{s} = K_{\mathrm{P}} + K_{\mathrm{I}}\frac{1}{s} = \frac{K_{\mathrm{P}}}{s}\left(s + \frac{1}{T_i}\right)$$

z_{PI} : zero del compensador PI, K_{P} : constante proporcional

K_{I} : constante integral, T_i : tiempo de integración




```
Con el comando pid de Matlab:  GPI = pid(Kp,Ki)
```

El compensador PI es obviamente un compensador de atraso de fase y es más sencillo de diseñar que los vistos en las secciones anteriores ya que tiene solo dos parámetros para determinar, K_{P} y el cero z_{PI} (o su inversa el tiempo integral T_i). Si se adopta como antes $z_{\mathrm{PI}} = \omega_c' / 10 \Leftrightarrow T_i = 10 / \omega_c'$, queda solo el parámetro K_{P} por determinar.

Diseño de un PI utilizado como el compensador lag1

<u>*Cuando se diseña un PI no hay especificación del error permanente ya que al incrementarse el tipo del sistema el error permanente se va a cero*</u>. Para que el PI cumpla la función de un compensador de atraso funcionando en el modo **lag1**, el diseño ya está definido, ya que en este caso para que no perturbe a la frecuencia de corte debe ser $K_P = 1$ y $z_{PI} \leq \omega_c^{'} / 10$. Adoptando $z_{PI} = \omega_c^{'} / 10$ se tiene que el PI depende solamente de $\omega_c^{'}$.

$$G_{PI}(j\omega) = 1 - j\frac{1}{10}\left(\frac{\omega_c^{'}}{\omega}\right)$$

Este compensador PI cumple con el objetivo de no modificar apreciablemente la respuesta en frecuencia en un entorno de $\omega_c^{'}$, ya que:

$$G_{PI}(j\omega_c^{'}) = 1 - j\frac{1}{10} \Rightarrow \begin{cases} \left|G_{PI}(j\omega_c^{'})\right| = \sqrt{1 + 0.1^2} \approx 1 \\ \measuredangle G_{PI}(j\omega_c^{'}) \approx \tan^{-1}(-0.1) \approx -5.7^{o} \end{cases}$$

Ejemplo 8

Datos: Consideremos la misma planta de los ejemplos anteriores:

$$G(s)=\frac{180}{s^2+18s+20}=\frac{180}{(s+16.81)\,(s+1.19)}$$

Vimos que esta planta tiene: $\bar{\phi}_L = 68.35^{\text{o}}$, $\omega_c^L = 9.3\,\text{rad/seg}$ y el error permanente del sistema a lazo cerrado $G_{cl}(s)=G(s)\,/\,(1+G(s))$ es $e_{ss}\% = 10\%$.

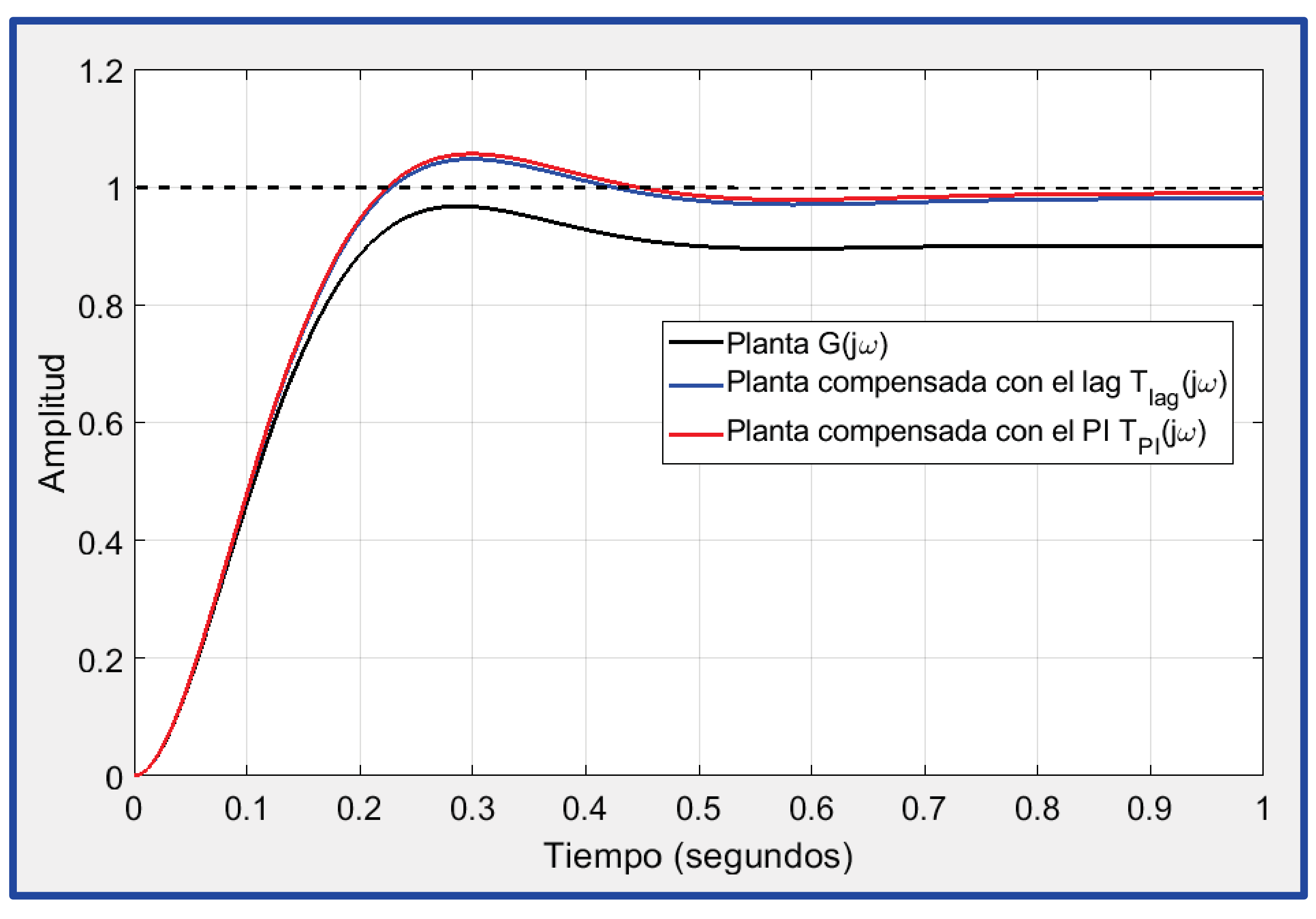
Ahora no se especifica el error en estado estacionario ya que al incrementar el tipo de del sistema el error es cero.

El compensador PI es simplemente:

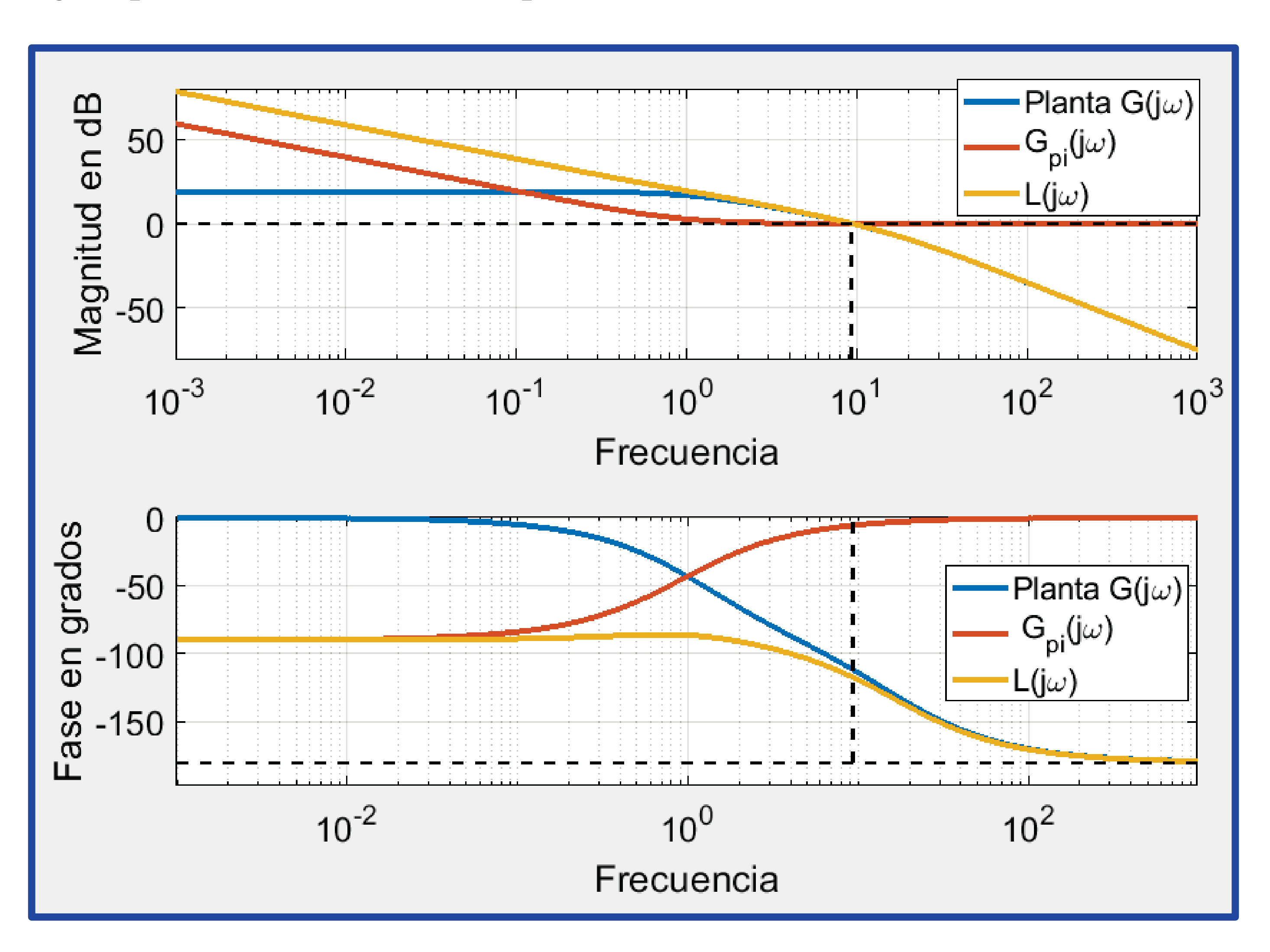
$$G_{\text{PI}}(j\omega)=1-j\frac{1}{10}\left(\frac{\omega_c^{'}}{\omega}\right)\Bigg|_{\omega_c^{'}=9.3}=1-j\left(\frac{0.93}{\omega}\right)$$

Resultados del ejemplo

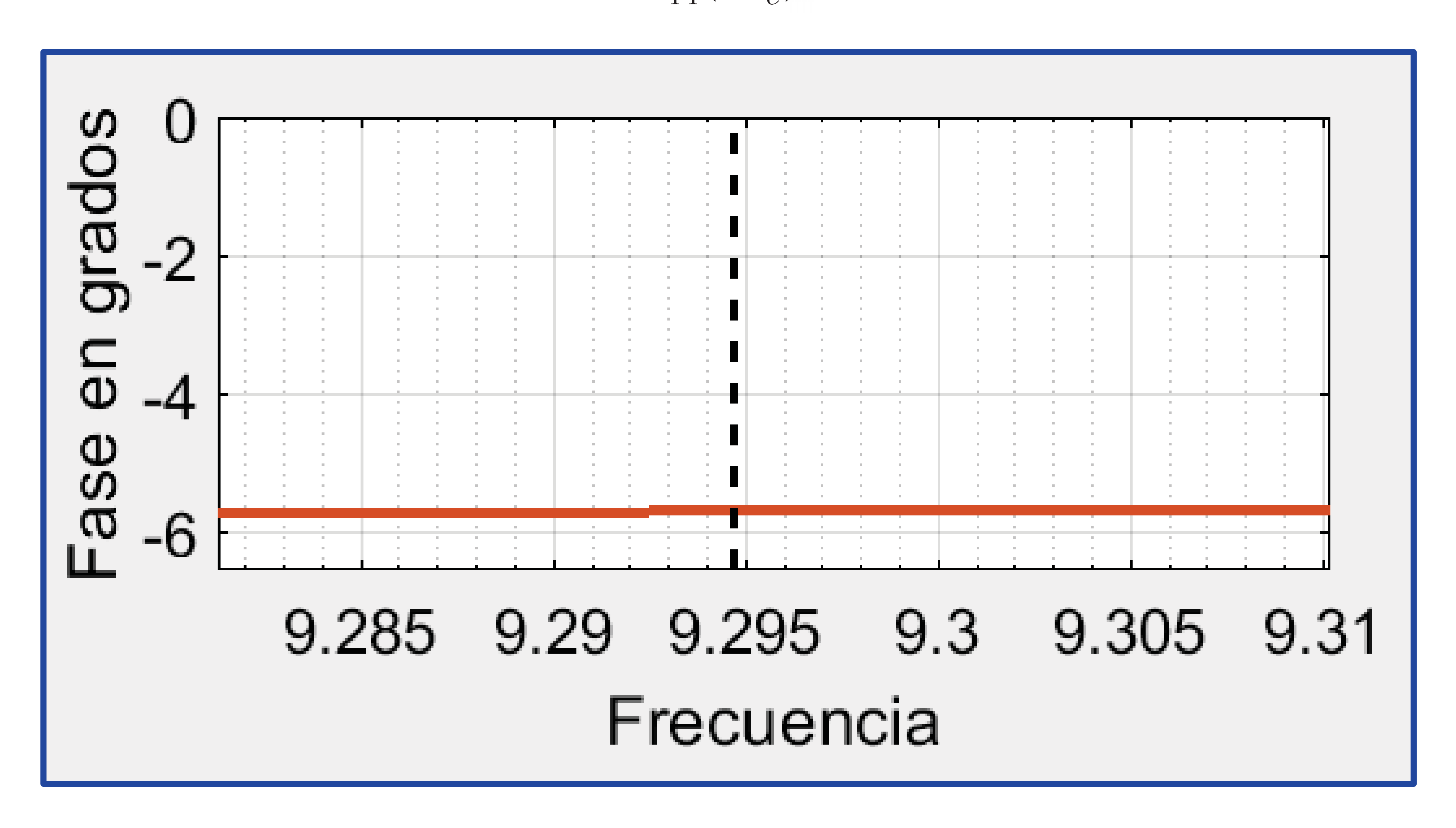
En la figura siguiente se grafican la respuesta al escalón de la planta sin compensar, de la planta compensada con el compensador de atraso y de la planta compensada con el PI. Se observa que el comportamiento con ambos compensadores es muy similar, la única diferencia es que con el compensador PI el error se va a cero.



En La figura siguiente se presentan los diagramas de Bode, en la zona de frecuencias cercanas a $\omega_c^{'}$ el comportamiento es muy similar a la de los lag vistos (afectan muy poco al módulo y la fase de $G(s)$). En la zona de bajas frecuencias lógicamente la magnitud del compensador PI y del sistema compensado se van al infinito cuando se aproximan a la frecuencia cero ya que son sistemas Tipo 1.



La figura siguiente muestra la imagen agrandada de la curva de fase del PI en $\omega_c^{'}$ se observa el resultado predicho $\measuredangle G_{\text{PI}}(j\omega_c^{'}) \approx -5.7^{\text{o}}$.



Diseño de un PI utilizado como el compensador lag2

El compensador PI usual utilizado ampliamente en la industria es cuando cumple la función de un compensador de atraso diseñado como la red **`lag2`**. En este caso, la única especificación es el margen de fase $\bar{\phi}_L$, y el procedimiento de diseño utilizando los diagramas de Bode es muy simple.

El paso 1 de los algoritmos de atraso de fase no es necesario, ya que al incrementar el Tipo de planta no hay que para satisfacer la especificación del error. Como ahora no hace falta determinar ninguna ganancia K^{lag}, tampoco es necesario definir $G_1(j\omega)$, se trabaja directamente con $G(j\omega)$.

- **Paso 1)** Se determinar la frecuencia de cruce $\omega_c^{'} < \omega_c$ de $L(j\omega)$.

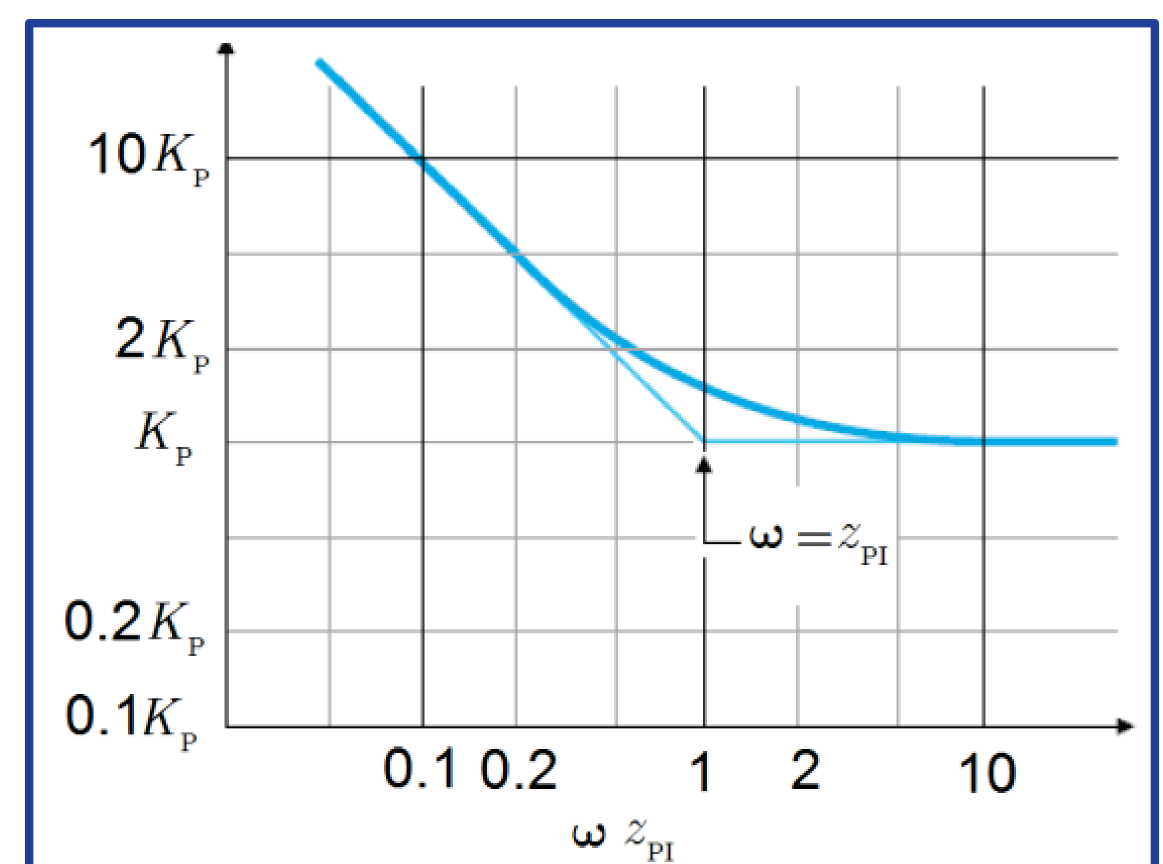
Este paso es idéntico al paso 3 del algoritmo de diseño de una red de atraso **lag2** debido a que la determinación de la frecuencia de cruce $\omega_c^{'} < \omega_c$ de $L(j\omega)$ no depende del compensador (obviamente ahora se utiliza $G(j\omega)$ en vez de $G_1(j\omega)$) y $\Delta = -\measuredangle G_{\mathrm{PI}}(j\omega_c^{'})$.

$$\omega_c^{'} = \underset{\omega \in (0\ \omega_c)}{\mathrm{sol}} \left[\measuredangle G_1(j\omega) + \pi - \bar{\phi}_L - \Delta = 0\right]$$

- **Paso 2)** Se elige z_{PI}

Como vimos anteriormente para evitar los efectos negativos del desfase producido por el compensador PI, el cero del compensador deben localizarse muy por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia $\omega_c^{'}$, así como antes adoptamos $z_{\mathrm{PI}} = \omega_c^{'}/10$.

- **Paso 3)** Se calcula la ganancia proporcional K_p



Se debe determinar la atenuación necesaria para llevar la curva de magnitud de $L(j\omega)$ a 0 dB en la frecuencia de cruce de ganancia $\omega_c^{'}$

Se debe cumplir que:

$$\left|L(j\omega_c^{'})\right| = \left|G_{PI}(j\omega_c^{'})G(j\omega_c^{'})\right| = 1$$

La figura muestra el diagrama de magnitud de un PI, se observa que para $\omega \to \infty$, $\left|G_{PI}(j\omega)\right| \to K_p$.

$$\left|G_{PI}(j\omega_c^{'})\right| \approx G_{PI}(\infty) = K_p$$

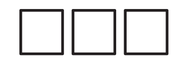
$$\left|L(j\omega_c^{'})\right| = \left|G_{PI}(j\omega_c^{'})G(j\omega_c^{'})\right| = \underbrace{\left|G_{PI}(j\omega_c^{'})\right|}_{K_p}\left|G(j\omega_c^{'})\right| = 1$$

Luego: $$K_p = \frac{1}{\left|G(j\omega_c^{'})\right|}$$

El compensador PI es:

$$G_{PI}(s) = \frac{K_P}{s}(s + z_{PI}) = \frac{(s + 0.1\omega_c^{'})}{\left|G(j\omega_c^{'})\right| s}$$

Al igual que en el diseño del compensador de atraso en el paso 1 se adoptó $\measuredangle G_{lag}(j\omega_c^{'}) = -\Delta < 0$, con $\Delta \in [5^o \quad 12^o]$. Ahora que se conoce el compensador se puede evaluar que tan bueno fue el Δ adoptado. Si difieren puede actualizarse el nuevo delta con $\Delta_{new} = \measuredangle G_{lag}(j\omega_c^{'})$ y recalcular todo desde el paso 2. Este procedimiento de estimación inicial-corrección es convergente.



Ejemplo 9

Datos: Consideremos la misma planta de antes

$$G(s) = \frac{180}{s^2 + 18s + 20} = \frac{180}{(s + 16.81)\,(s + 1.19)}$$

La planta tiene un margen de fase $\bar{\phi}_L = 68.35^{\mathrm{o}}$, una frecuencia de cruce $\omega_c^L = 9.3\,\mathrm{rad/seg}$, y el error en estado estacionario ante una entrada escalón del sistema a lazo cerrado $G_{cl}(s) = G(s)\,/\,(1 + G(s))$ es $e_{ss}\% = 10\%$.

Ahora se especifica el error en estado estacionario ya que al incrementar el tipo de del sistema el error es cero.

Especificación de estabilidad ($\bar{\phi}_L$): Como en el ejemplo 7

$\bar{\phi}_L = 76.35^{\mathrm{o}}$

- **Paso 1)** Se tiene la misma frecuencia de cruce $\omega_c^{'} < \omega_c$ de $L(j\omega)$: $\omega_c^{'} = 6.077\,\mathrm{rad/seg}$.

- **Paso 2)** Se tiene el mismo cero que en los ejercicios 7 y 8: $z_{\mathrm{PI}} = \omega_c^{'}/10 \approx 0.6$

- **Paso 3)** Se calcula la ganancia proporcional $K_p = \dfrac{1}{\left|G(j\omega_c^{'})\right|} \approx 0.61$

El compensador PI resultante es:

$$G_{\mathrm{PI}}(s) = \frac{K_{\mathrm{P}}}{s}(s + z_{\mathrm{PI}}) \approx \frac{0.61}{s} \; s + 0.6$$

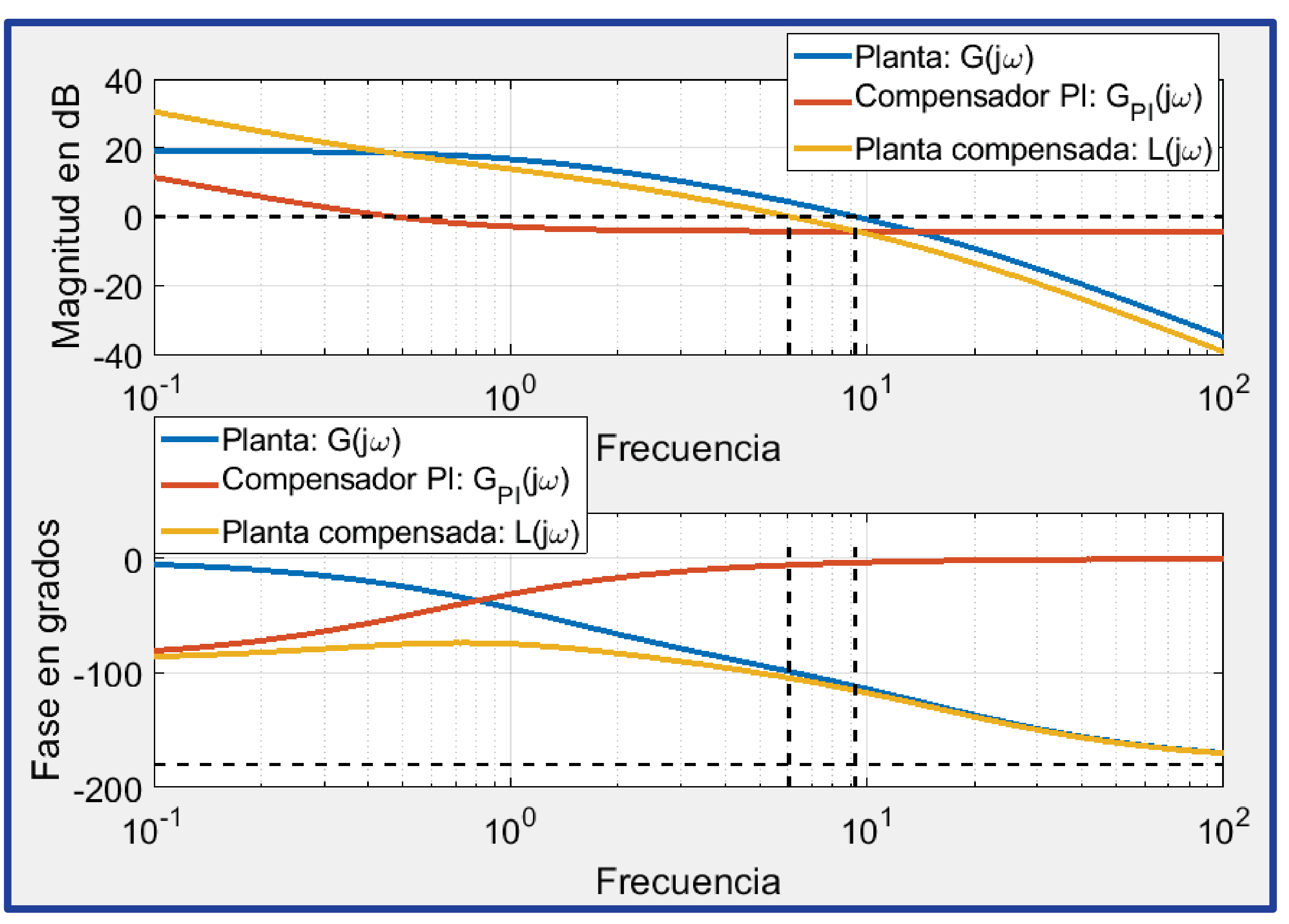
Resultados del ejemplo

La tabla siguiente da los valores de los parámetros y características obtenidas.

```
LAS CARACTERÍSTICAS OBTENIDAS CON EL DISEÑO DEL PI SON:
La frecuencia de cruce de la planta es           = 9.29 rad/seg
La frecuencia de cruce de L(jw) es               = 6.08 rad/seg
La sobreelongación de la planta sin compensar es = 7.49%
La sobreelongación de la planta compensada    es = 0 %
El margen de fase de la planta sin compensar es = 68.36º
El margen de fase especificado es               = 76.35º
El margen de fase del sistema compensado es     = 75.5º
El ancho de banda de la planta sin compensar es = 15.53 rad/seg
El ancho de banda de L(jw) es                   = 8.48 rad/seg
La fase del compensador en wc_L es              = -5º
La fase del compensador en wc_L es              = -5.68º
```

Los resultados son casi idénticos al diseño con la red de atraso anterior.

La respuesta al escalón (no se muestra) es muy similar a la del ejemplo con lead, la única diferencia es que con el tiempo el error se va a cero. Los diagramas de Bode muestran que en la zona de frecuencias cercanas a $\omega_c^{'}$ es muy similar a la del lead. En la zona de bajas frecuencias lógicamente el PI se va al infinito cuando se aproxima a la frecuencia cero.



Diseño de un PI utilizado como el compensador lag3

- **Paso 1)** Como se conoce $\omega_c^{'}$ se calcula directamente z_{PI} : $\boxed{z_{\text{PI}} = \omega_c^{'}/10}$

.

- **Paso 2)** Se calcula la ganancia proporcional K_p

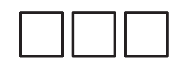
Por ser $\omega_c^{'}$ la frecuencia de cruce de ganancia se cumple que: $\left|L(j\omega_c^{'})\right| = \left| G_{\text{PI}}(j\omega_c^{'})G(j\omega_c^{'})\right| = 1$

Vimos que para un compensador PI para $\omega \to \infty$, $\left|G_{\text{PI}}(j\omega)\right| \to K_p$, luego $\left|G_{\text{PI}}(j\omega_c^{'})\right| \approx G_{\text{PI}}(\infty) = K_p$

$$\left|L(j\omega_c^{'})\right| = \left|G_{\mathrm{PI}}(j\omega_c^{'})\,G(j\omega_c^{'})\right| = \underbrace{\left|G_{\mathrm{PI}}(j\omega_c^{'})\right|}_{K_p}\left|G(j\omega_c^{'})\right| = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{K_p = \frac{1}{\left|G(j\omega_c^{'})\right|}}$$

El compensador PI es: $$\boxed{G_{\mathrm{PI}}(s) = \frac{K_{\mathrm{P}}}{s}(s + z_{\mathrm{PI}}) = \frac{(s + 0.1\omega_c^{'})}{\left|G(j\omega_c^{'})\right| s}}$$

Este resultado es el mismo del PI diseñado como **lag2** en este caso $\omega_c^{'}$ es una especificación y en **lag2** $\omega_c^{'}$ se obtiene como la frecuencia de cruce que satisface la especificación del margen de fase $\bar{\phi}_L$.



Control II - 2024

Compensadores de adelanto-atraso de fase o red de compensación mixta

Fernando di Sciascio

Compensadores de adelanto-atraso o red de compensación mixta

Una red mixta es una red de compensación que superpone los efectos de la red de adelanto (que se diseña primero) con los de la red de retardo que se diseña al final. Para ello se dispone una red de adelanto de fase (en altas frecuencias) en serie o cascada con una red de atraso de fase (en bajas frecuencias).

En las tablas siguientes se resumen todos los diseños que hemos visto de redes de adelanto de fase (`lead` o `lead1`, `lead2` y `lead3`) y de atraso de fase (`lag` o `lag0,` `lag1`, `lag2` y `lag3`), junto con su funcionalidad.

Estructura y nomenclatura del compensador de adelanto de fase

$$G_{lead}^{*}(s) = K_c^{lead}\frac{(s+z_{lead})^n}{(s+p_{lead})^n} = \underbrace{K_c^{lead}\underbrace{\left(\frac{z_{lead}}{p_{lead}}\right)^n}_{\alpha_{lead}{}^{n}}}_{K^{lead}=\alpha_{lead}{}^{n}K_c^{lead}}\underbrace{\frac{(s/z_{lead}+1)^n}{(s/p_{lead}+1)^n}}_{G_{lead}(s)} = K^{lead}\ G_{lead}(s)$$

Diseño	Especificaciones	Observaciones
Compensador de adelanto de fase **lead1** $G_{lead}^{*}(j\omega) = \text{lead1}(G(j\omega), \bar{\phi}_L, \omega_c')$	$\bar{\phi}_L$, ω_c'	No se tiene control sobre el valor final de la ganancia de Bode K^{lead} la cual puede satisfacer o no K_n .
Compensador de adelanto de fase **lead2** $G_{lead}^{*}(j\omega) = \text{lead2}(G(j\omega), K_n, \bar{\phi}_L)$	K_n , $\bar{\phi}_L$	No se tiene control sobre el valor final de ω_c' la cual es mayor que la del sistema sin compensar ω_c .
Compensador de adelanto de fase **lead3** $G_{lead}^{*}(j\omega) = \text{lead3}(G(j\omega), K_n, \omega_c')$	K_n , ω_c'	No se tiene control sobre el valor final de $\bar{\phi}_L$ que es menor que el del sistema sin compensar $\bar{\phi}_G$.

Estructura y nomenclatura del compensador de atraso de fase		
$$G_{lag}^{*}(s) = K_c^{lag}\frac{(s+z_{lag})}{(s+p_{lag})} = \underbrace{K_c^{lag}\alpha_{lag}}_{K^{lag}}\underbrace{\frac{(s/z_{lag}+1)}{(s/p_{lag}+1)}}_{G_{lag}(s)} = K^{lag}G_{lag}(s)$$		
Diseño	**Especificaciones**	**Observaciones**
Compensador de atraso de fase **lag1** $G_{lag}^{*}(j\omega) = \texttt{lag1}(G(j\omega), K_n)$	K_n	Satisface la especificación K_n Deja invariantes $\bar{\phi}_L$ y ω_c'
Compensador de atraso de fase **lag2** $G_{lag}^{*}(j\omega) = \texttt{lag2}(G(j\omega), K_n, \bar{\phi}_L)$	K_n , $\bar{\phi}_L$	Satisface las especificaciones $\bar{\phi}_L > \bar{\phi}_G$ y K_n. Disminuye $\omega_c' < \omega_c$ pero sin control del valor final.
Compensador de atraso de fase **lag3** $G_{lag}^{*}(j\omega) = \texttt{lag3}(G(j\omega), K_n, \omega_c')$	K_n , ω_c'	Satisface las especificaciones $\omega_c' < \omega_c$ y K_n. Se incrementa $\bar{\phi}_L$ pero sin control del valor final.

La compensación de adelanto de fase básicamente acelera la respuesta ($\omega_c^{'} \uparrow$) e incrementa la estabilidad del sistema ($\overline{\phi}_L \uparrow$). La compensación de atraso de fase mejora la precisión en estado estacionario ($K_n \uparrow \Rightarrow e_{ss} \downarrow$), también puede incrementar la estabilidad del sistema ($\overline{\phi}_L \uparrow$), pero reduce la velocidad de la respuesta ($\omega_c^{'} \downarrow$). Si se desea mejorar tanto la respuesta transitoria como la respuesta en estado estacionario, deben utilizarse ambos compensadores simultáneamente conectados en serie o cascada para formar un compensador combinado de adelanto-atraso. Siempre se diseña primero la parte de adelanto y se finaliza con la de atraso.

La compensación mixta o de adelanto-atraso combina las ventajas de las compensaciones de adelanto y de atraso.

Estructura del compensador de adelanto-atraso de fase

La estructura general del compensador de adelanto-atraso de fase es:

Red de adelanto de fase

$$G^*_{lead}(s) = K^{lead} \underbrace{\frac{(s / z_{lead} + 1)^n}{(s / p_{lead} + 1)^n}}_{G_{lead}(s)} = K^{lead} \underbrace{\frac{1}{\alpha_{lead}{}^n} \frac{(s + z_{lead})^n}{(s + p_{lead})^n}}_{G_{lead}(s)} = \underbrace{K_c^{lead}}_{K^{lead} / \alpha_{lead}{}^n} \frac{(s + z_{lead})^n}{(s + p_{lead})^n}$$

Red de atraso de fase

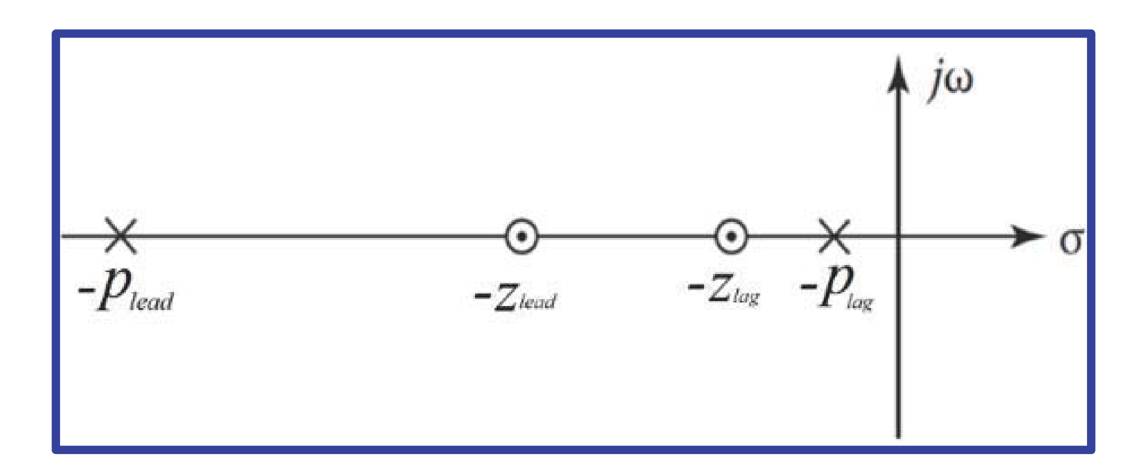
$$G^*_{lag}(s) = K^{lag} \underbrace{\frac{(s / z_{lag} + 1)}{(s / p_{lag} + 1)}}_{G_{lag}(s)} = K^{lag} \underbrace{\frac{1}{\alpha_{lag}} \frac{(s + z_{lag})}{(s + p_{lag})}}_{G_{lag}(s)} = \underbrace{K_c^{lag}}_{K^{lag} / \alpha_{lag}} \frac{(s + z_{lag})}{(s + p_{lag})}$$

Red de compensación mixta

$$G_c^*(s) = G_{lag}^*(s)G_{lead}^*(s) = \underbrace{K^{lag}K^{lead}}_{K} \frac{1}{\alpha_{lag}\alpha_{lead}{}^n} \frac{(s+z_{lag})}{(s+p_{lag})} \frac{(s+z_{lead})^n}{(s+p_{lead})^n}$$

$$= \frac{K}{\underbrace{\alpha_{lag}\alpha_{lead}{}^n}_{K_c}} \frac{(s+z_{lag})}{(s+p_{lag})} \frac{(s+z_{lead})^n}{(s+p_{lead})^n} = K_c \frac{(s+z_{lag})}{(s+p_{lag})} \frac{(s+z_{lead})^n}{(s+p_{lead})^n}$$

$$\alpha_{lag} = \frac{z_{lag}}{p_{lag}} > 1,\ \alpha_{lead} = \frac{z_{lead}}{p_{lead}} < 1,\ z_{lag} < z_{lead},\ K = \alpha_{lead}\alpha_{lag} K_c$$



El compensador de adelanto-atraso de fase tiene seis parámetros para determinar: α_{lead}, z_{lead}, n , K^{lead}, α_{lag} y K^{lag} (o $K = K^{lag}K^{lead}$ y $K_c = K / \alpha_{lag}\alpha_{lead}{}^{n}$). ***Este controlador es de un grado de libertad porque el diseñador puede elegir solamente un parámetro libremente***. Normalmente como hemos visto se elige $\omega_c' / 2 \leq z_{lag} \leq \omega_c' / 10$, donde ω_c' es la frecuencia de cruce de ganancia especificada para el sistema compensado $L(j\omega)$.

Observación: En el diseño con el lugar de las raíces este compensador de adelanto atraso era de dos grados de libertad ya que también se elegía la posición del cero de la red de adelanto.

Diseño de compensadores de adelanto-atraso de fase

En el diseño de redes mixtas no hay teoría nueva, simplemente integramos lo visto anteriormente sobre los compensadores de adelanto y de atraso de fase. Obviamente una red mixta o compensador de adelanto-atraso de fase es una combinación de un controlador de adelanto con uno de atraso. En todos los casos que analizaremos las especificaciones serán las mismas: K_n, $\bar{\phi}_L$ y $\omega_c^{'}$.

Se eligen K_n, $\bar{\phi}_L$ y $\omega_c^{'}$ porque son las más representativas en el dominio de la frecuencia y porque se utilizan directamente en los cálculos y ya sabemos que todas las especificaciones de estabilidad, de velocidad y de error permanente son equivalentes entre sí.

En principio con los tres compensadores de adelanto de fase vistos (`lead1`, `lead2` y `lead3`) y los tres de atraso de fase (`lag1`, `lag2` y `lag3`) son posibles nueve combinaciones o diseños:

`lead1-lag1`, **`lead1-lag2`**, **`lead1-lag3`**, **`lead2-lag1`**, **`lead2-lag2`**, **`lead2-lag3`**, **`lead3-lag1`**, **`lead3-lag2`** y **`lead3-lag3`**.

La mayoría de estas combinaciones son inútiles ya que no permiten satisfacer alguna de las especificaciones. Por ejemplo, **`lead2-lag1`**, las especificaciones de **`lead2`** son K_n y $\overline{\phi}_L$ y la de **`lag1`** es K_n, por lo tanto no se puede satisfacer la especificación $\omega_c^{'}$ o **`lead2-lag2`**, las especificaciones de **`lead2`** y **`lag2`** son las mismas K_n y $\overline{\phi}_L$, por lo tanto no se satisface la especificación $\omega_c^{'}$, etc.

Algunas de las combinaciones que involucrana **`lead2`** y **`lag2`** son factibles, pero se descartan porque desde el punto de vista numérico-computacional son más complejas de implementar (recordar que en los diseños **`lead2`** y **`lag2`** se debe determinar $\omega_c^{'}$ resolviendo numéricamente una ecuación implícita no lineal utilizando algoritmos de búsqueda recursivos).

De lo anterior es posible concluir que solo **hay dos combinaciones adecuadas**: el diseño **`lead1-lag1`** y el diseño **`lead1-lag3`**.

Diseño	Observaciones
`lead1-lag1` $G_c^*(j\omega) = \texttt{lead1-lag1}(G(j\omega), K_n, \bar{\phi}_L, \omega_c^{'})$	Este diseño es análogo al visto en el diseño con el lugar de las raíces. El diseño es sencillo ya que las partes de adelanto y de atraso se diseñan de forma independiente. También es directo o analítico ya que se realizan calculando una secuencia de fórmulas.
`lead1-lag3` $G_c^*(j\omega) = \texttt{lead1-lag3}(G(j\omega), K_n, \bar{\phi}_L, \omega_c^{'})$	Este diseño al igual que el lead1-lag1 es sencillo y directo.

Estos dos diseños y los descartados por ser computacionalmente complicados CONDUCEN AL MISMO COMPENSADOR.

Como en el diseño de la parte de adelanto no existe la libertad de elegir la posición del cero en $-z_{lead}$ las redes mixtas diseñadas en el dominio de la frecuencia son de un grado de libertad ya que solo se puede elegir libremente la posición del cero de la parte de atraso en $-z_{lag}$.

Al igual que en el caso de la red de avance y retardo, en el diseño de la red mixta existen límites prácticos de los coeficientes α_{lag} y α_{lead}. La atenuación α_{lead} por cuestiones prácticas de implementación debe ser superior a 0.01; la amplificación α_{lag} no debe ser tampoco demasiado grande, pues un valor muy grande de α_{lag} produce un polo muy lento del controlador.

Red de compensación mixta

Diseño 1: Combinación lead1-lag1

Diseño 1: Combinación lead1-lag1

$$G_c^*(j\omega) = \texttt{lead1}(G(j\omega), \bar{\phi}_L, \omega_c^{'})\texttt{lag1}(G(j\omega), K_n)$$

Este caso es completamente análogo al compensador de adelanto-atraso que vimos con el diseño del lugar de las raíces.

La combinación de los diseños **lead1-lag1** se complementan perfectamente entre sí. compensador de adelanto **lead1** hace todo el trabajo para cumplir las especificaciones dinámicas ($\bar{\phi}_L$ y $\omega_c^{'}$) y posteriormente el compensador de atraso **lag1** termina la tarea agregando la ganancia en bajas frecuencias para cumplir la especificación de error permanente (K_n).

El diseño es sencillo y directo ya que las partes de adelanto y de atraso se diseñan de manera independiente.

Algoritmo de diseño lead1-lag1

Especificaciones: K_n, $\overline{\phi}_L$ y $\omega_c^{'}$.

Parte I- Diseño de la parte de adelanto lead1

Hay que considerar que para el compensador de adelanto que se va a diseñar, el sistema no compensado es $G_{lag}^{*}(s)G(s)$ y que en el entorno de $\omega_c^{'}$ (que es donde se diseña toda red de adelanto de fase) $\left|G_{lag}^{*}(j\omega_c^{'})\right| \approx K^{lag}$ y $\measuredangle G_{lag}^{*}(j\omega_c^{'}) = \measuredangle G_{lag}(j\omega_c^{'}) \approx 6^{o}$.

- **Paso 1)** Se determina $\Phi_m = \angle G_{lead}(j\omega_c^{'})$, el adelanto de fase que debe entregar la red y se fuerza a que sea a la frecuencia $\omega_c^{'} = \sqrt{z_{lead} p_{lead}}$.

Solo hay que hacer una corrección con respecto al diseño de un compensador de adelanto que se vio anteriormente, se debe agregar el pequeño deterioro en el margen de fase que produce el compensador de atraso.

El ángulo Φ_m se obtiene a partir de la definición del margen de fase $\bar{\phi}_L$:

$$\bar{\phi}_L = \pi + \underbrace{\measuredangle L(j\omega_c^{'})}_{\measuredangle G_c(j\omega_c^{'}) + \measuredangle G(j\omega_c^{'})} = \pi + \underbrace{\measuredangle G_{lead}(j\omega_c^{'})}_{\Phi_m} + \underbrace{\measuredangle G_{lag}(j\omega_c^{'})}_{\Delta_{G_{lag}} = -\Delta_{G_{lag}} \approx 6^{o}} + \measuredangle G(j\omega_c^{'})$$

$$= \pi + \Phi_m + \Delta_{G_{lag}} + \measuredangle G(j\omega_c^{'})$$

despejando Φ_m:

$$\boxed{\Phi_m = \bar{\phi}_L - \pi - \measuredangle G(j\omega_c^{'}) + \Delta_{G_{lag}}}$$

Donde $\Delta_{G_{lag}} = -\measuredangle G_{lag}(j\omega_c^{'}) > 0$ es el valor absoluto de fase de la red de atraso a la frecuencia $\omega_c^{'}$. Vimos anteriormente en los diseños **lag y PI** que adoptando la frecuencia esquina del cero una década por debajo de $\omega_c^{'}$ $(z_{lag} = \omega_c^{'} / 10)$, se tiene que $\Delta_{G_{lag}} = -\measuredangle G_{lag}(j\omega_c^{'}) \approx 6^{\circ}$.

En la expresión anterior de Φ_m se utiliza este valor $\Delta_{G_{lag}} \approx 6^{\circ}$. Esto es lo único que cambia con respecto a los diseños lead que vimos antes, esto es, se incorpora el efecto del compensador de atraso con el término $\measuredangle G_{lag}(j\omega_c^{'})$. Al final del diseño se puede comparar si el $\Delta_{G_{lag}}$ elegido coincide o es muy próximo al real, si difieren mucho, se rehace el diseño adoptando el nuevo valor de $\Delta_{G_{lag}}$ que se ha medido.

Lo pasos siguientes son iguales a los vistos anteriormente, se obtiene el sistema compensado con $\overline{\phi}_L$ y $\omega_c^{'}$ próximos a los especificados.

- **Paso 2)** Se determina el número de etapas necesarias:

$$n = \uparrow\left(\frac{\Phi_m}{70^{\circ}}\right)$$

- **Paso 3)** Se determina el aporte de fase de cada etapa:

$$\phi_m = \Phi_m / n$$

- **Paso 4)** Se calcula el factor de atenuación de cada etapa:

$$\alpha_{lead} = \frac{1 - \operatorname{sen}(\phi_m)}{1 + \operatorname{sen}(\phi_m)}$$

- **Paso 5)** Se calculan las posiciones del cero z_{lead} y el polo p_{lead} de cada etapa del compensador con el par de ecuaciones $\alpha_{lead} = z_{lead} / p_{lead}$ y $\omega_c^{'} = \sqrt{z_{lead} p_{lead}}$.

$$\begin{cases} z_{lead}\, p_{lead} = \omega_c^{'2} \\ \dfrac{z_{lead}}{p_{lead}} = \alpha_{lead} \end{cases}$$



$$\boxed{z_{lead} = \omega_c^{'} \sqrt{\alpha_{lead}}} \quad , \quad \boxed{p_{lead} = \omega_c^{'} / \sqrt{\alpha_{lead}}}$$

- **Paso 6)** Se calcula la ganancia del compensador K^{lead} se obtiene de la condición $\left|L(j\omega_c^{'})\right| = 1$.

$$\left|L(j\omega_c^{'})\right| = K^{lead}\underbrace{\left|G_{lead}(j\omega_c^{'})\right|}_{1/\alpha_{lead}{}^{n/2}}\left|G(j\omega_c^{'})\right| = 1$$

$$\boxed{K^{lead} = \frac{\alpha_{lead}{}^{n/2}}{\left|G(j\omega_c^{'})\right|}} \quad , \quad \boxed{K_c^{lead} = \frac{K^{lead}}{\alpha_{lead}{}^{n}} = \frac{1}{\alpha_{lead}{}^{n/2}\left|G(j\omega_c^{'})\right|}}$$

El compensador de adelanto de fase de *n* etapas completo es entonces:

$$\boxed{G_{lead}^{*}(s) = K^{lead}\frac{(s\ /\ z_{lead}+1)^{n}}{(s\ /\ p_{lead}+1)^{n}} = \frac{K^{lead}}{\alpha_{lead}{}^{n}}\frac{(s+z_{lead})^{n}}{(s+p_{lead})^{n}}}$$

La ganancia K^{lead} seguramente será bastante menor a la ganancia mínima necesaria $K^{lead}_{\min}$ que permite obtener la ganancia K_n especificada. Esto lo resuelve el compensador **lag1** que se diseña en la parte II.

Parte II- Diseño de la parte de atraso lag1

Hay que considerar que para el compensador de atraso de fase que se va a diseñar, el sistema no compensado es $G^{*}_{lead}(s)G(s)$ y que en las frecuencias bajas (en el entorno de $\omega = 0$ es donde se diseña toda red de atraso) $\left|G^{*}_{lead}(0)\right| \approx K^{lead}$ y $\measuredangle G_{lead}(0) \approx 0^{\text{o}}$.

- **Paso 7)** Se determina la ganancia K^{lag} (mínima) que satisface los requisitos sobre la constante de error estático K_n.

$$G_c^*(s) = \underbrace{G_{lag}^*(s)}_{\frac{K^{lag}(s/z_{lag}+1)}{(s/p_{lag}+1)}} \underbrace{G_{lead}^*(s)}_{\frac{K^{lead}(s/z_{lead}+1)^n}{(s/p_{lead}+1)^n}} = \frac{K^{lag}(s/z_{lag}+1)}{(s/p_{lag}+1)} \frac{K^{lead}(s/z_{lead}+1)^n}{(s/p_{lead}+1)^n}$$

$$= \underbrace{K^{lag}K^{lead}}_{K} G_{lag}(s)G_{lead}(s)$$

$$K_n = \lim_{s\to 0} s^n G_c^*(s)G(s) = \underbrace{G_c^*(0)}_{K^{lag}K^{lead}} \underbrace{\lim_{s\to 0} s^n G(s)}_{K_n^G} = K^{lag}K^{lead}K_n^G \Rightarrow$$

$$\boxed{K^{lag} = \frac{K_n}{K^{lead}K_n^G}}$$

- **Paso 8)** Se calcula α_{lag}

Como $\omega_c^{'}$ debe seguir siendo la frecuencia de cruce del sistema compensado con la red de atraso debe ser:

$$K^{lag}\left|G_{lag}(j\omega_c^{'})\right|\underbrace{\left|K^{lead}G_{lead}(j\omega_c^{'})G(j\omega_c^{'})\right|}_{1}\approx 1 \Rightarrow \left|G_{lag}(j\omega_c^{'})\right| = 1 \,/\, K^{lag}$$

Como se elegirá el cero muy alejado a la izquierda de $\omega_c^{'}$ ($z_c \leq \omega_c^{'}/10$) de la tabla de respuesta en frecuencia se tiene que:

$$\left|G_{lag}(j\omega_c^{'})\right| \approx \left|G_{lag}(\infty)\right| = 1 \,/\, \alpha_{lag}$$

Reemplazando: $\left|G_{lag}(j\omega_c^{'})\right| = 1 \,/\, \alpha_{lag} = 1 \,/\, K^{lag} \Rightarrow \boxed{\alpha_{lag} = K^{lag}}$

- **Paso 9)** Se elige z_{lag} y se calcula p_{lag} :

$$z_{lag} = \omega_c^{'}/10 \quad , \quad p_{lag} = \omega_c^{'}/10K^{lag}$$

El compensador será de la forma $G_{lag}^{*}(s) = \underbrace{K^{lag}\frac{1}{\alpha_{lag}}}_{K_c^{lag}=1}\frac{(s+z_{lag})}{(s+p_{lag})} = \frac{s+z_{lag}}{s+p_{lag}}$

El compensador de atraso de fase es: $G_{lag}^{*}(s) = \frac{(s+z_{lag})}{(s+p_{lag})}$

El controlador completo es:

$$G_c^{*}(s) = G_{lead}^{*}(s)G_{lag}^{*}(s) = \frac{K^{lead}}{\alpha_{lead}{}^{n}}\frac{(s+z_{lead})^{n}}{(s+p_{lead})^{n}}\frac{(s+z_{lag})}{(s+p_{lag})}$$



Ejemplo

Datos: **La planta Tipo 0:** $$G(s) = \frac{6\,(s+1.5)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Especificaciones:

Error de estado estacionario para una entrada escalón unitario: 0.01 (1%)

Las especificaciones dinámicas:

Porcentaje de sobreelongación = $\%Os \leq 10\%$

Tiempo de establecimiento: $T_s = 1\,\mathrm{seg}$

Estas especificaciones son equivalentes a $K_0 = 99$, $\bar{\phi}_L \approx 60^{\mathrm{o}}$

y $\omega_c' = 5\,\mathrm{rad/seg}$

Parte I- Diseño de la parte de adelanto lead1

- **Paso 1)**

$$\Phi_m = \bar{\phi}_L - 180^{\circ} - \measuredangle G(j\omega_c^{'}) - \measuredangle G_{lag}(j\omega_c^{'}) = \underbrace{60^{\circ}}_{\bar{\phi}_L} - 180^{\circ} - \underbrace{\measuredangle G(j\omega_c^{'})}_{-132.62^{\circ}} + 11^{\circ} = 23.62^{\circ}$$

- **Paso 2)** $n = \uparrow\left(\dfrac{\Phi_m}{70^{\circ}}\right) = \uparrow\left(\dfrac{23.62^{\circ}}{70^{\circ}}\right) = 1$

- **Paso 3)** $\phi_m = \Phi_m = 23.62^{\circ}$,

- **Paso 4)** $\alpha_{lead} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}(\phi_m)}{1 + \operatorname{sen}(\phi_m)} = 0.43$

- **Paso 5)** $z_{lead} = \omega_c^{'}\sqrt{\alpha_{lead}} = 3.27$, $p_{lead} = \omega_c^{'} / \sqrt{\alpha_{lead}} = 7.64$

- **Paso 6)** $K_c^{lead} = \dfrac{K^{lead}}{{\alpha_{lead}}^{n}} = \dfrac{1}{{\alpha_{lead}}^{n/2}\left|G(j\omega_c^{'})\right|} = 7.82$

El compensador de adelanto de fase de una etapa es:

$$G_{lead}^{*}(s) = 7.82\frac{(s+3.27)}{(s+7.64)}$$

Parte II- Diseño de la parte de atraso lag1

- **Paso 7 y 8)** $K^{lag} = \dfrac{K_n}{K^{lead}K_n^G} \approx 19.74 \quad , \quad \alpha_{lag} = K^{lag} \approx 19.74$

- **Paso 9)** $z_{lag} = \omega_c^{'}/5 = 1\ , \quad p_{lag} = \omega_c^{'}/10K^{lag} = 0.051$

El compensador de atraso de fase es: $G_{lag}^{*}(s) = \dfrac{(s+1)}{(s+0.051)}$

El compensador de adelanto-atraso **lead1-lag1** es:

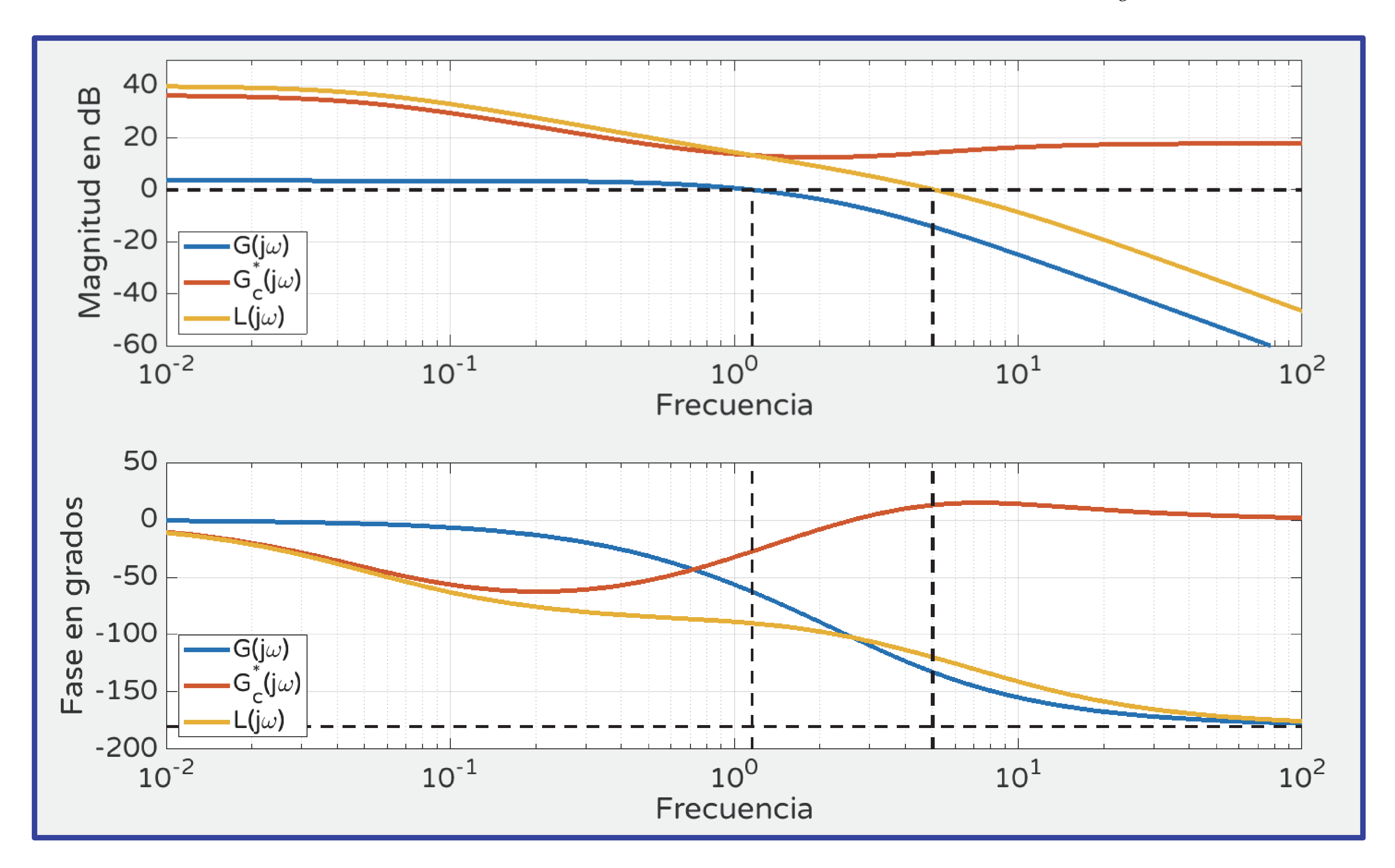
$$G_c^*(s) = G_{lead}^*(s)G_{lag}^*(s) = 7.82\frac{(s+3.27)}{(s+7.64)}\frac{(s+1)}{(s+0.051)}$$

Los resultados de las simulaciones son:

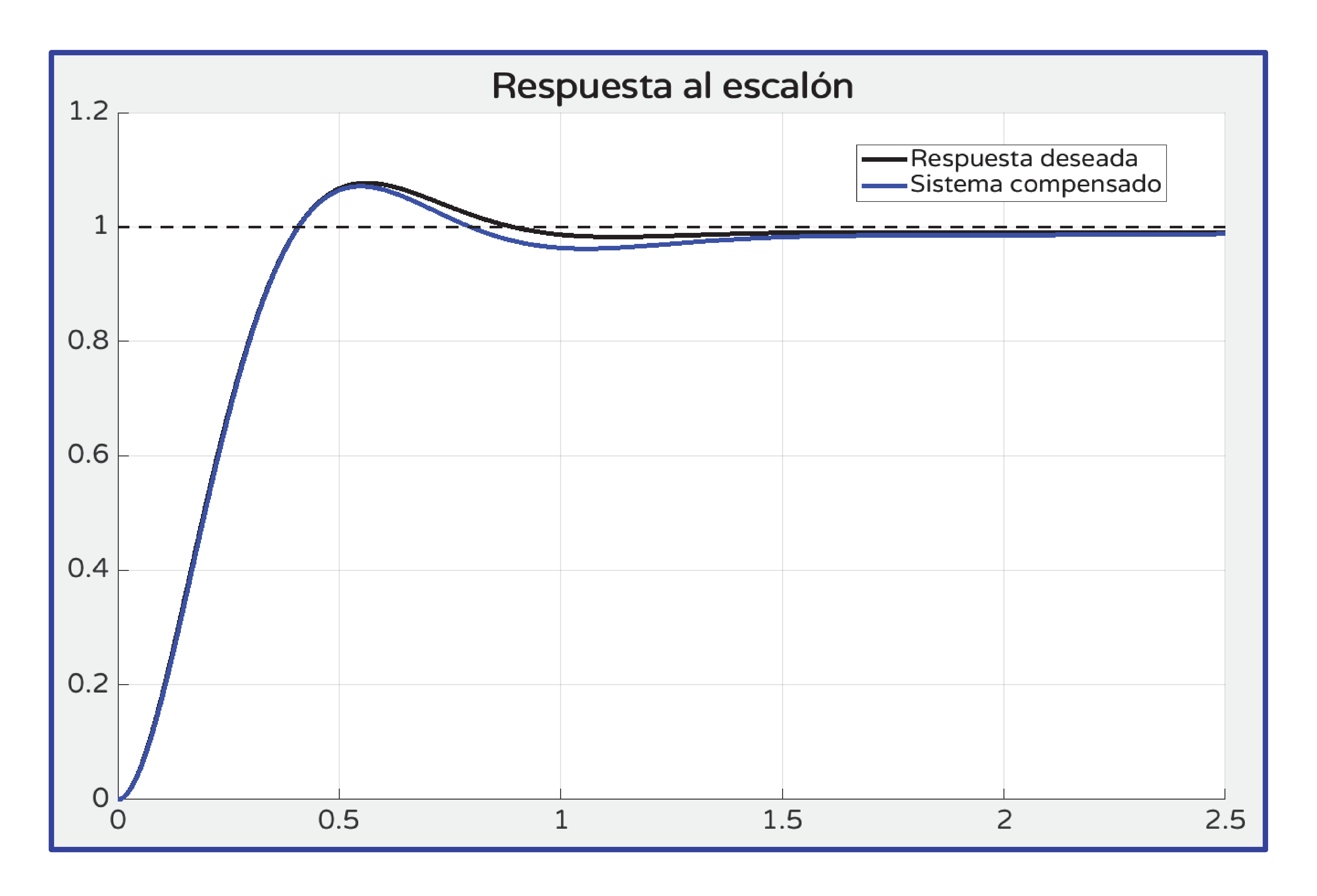
```
LAS CARACTERÍSTICAS OBTENIDAS CON EL DISEÑO lead1-lag1 SON:
La ganancia Kn especificada es                      = 99
La ganancia Kn del error estático de L(jw) es       = 99
La frecuencia de cruce especificada es              = 5 rad/seg
La frecuencia de cruce de L(jw) obtenida es         = 5.09 rad/seg
La sobreelongación de la planta compensada es       = 9.8%
El margen de fase especificado es                   = 60 grados
El margen de fase del sistema compensado es         = 58.58 grados
```

Se observa en la tabla que se cumplen todas las especificaciones.

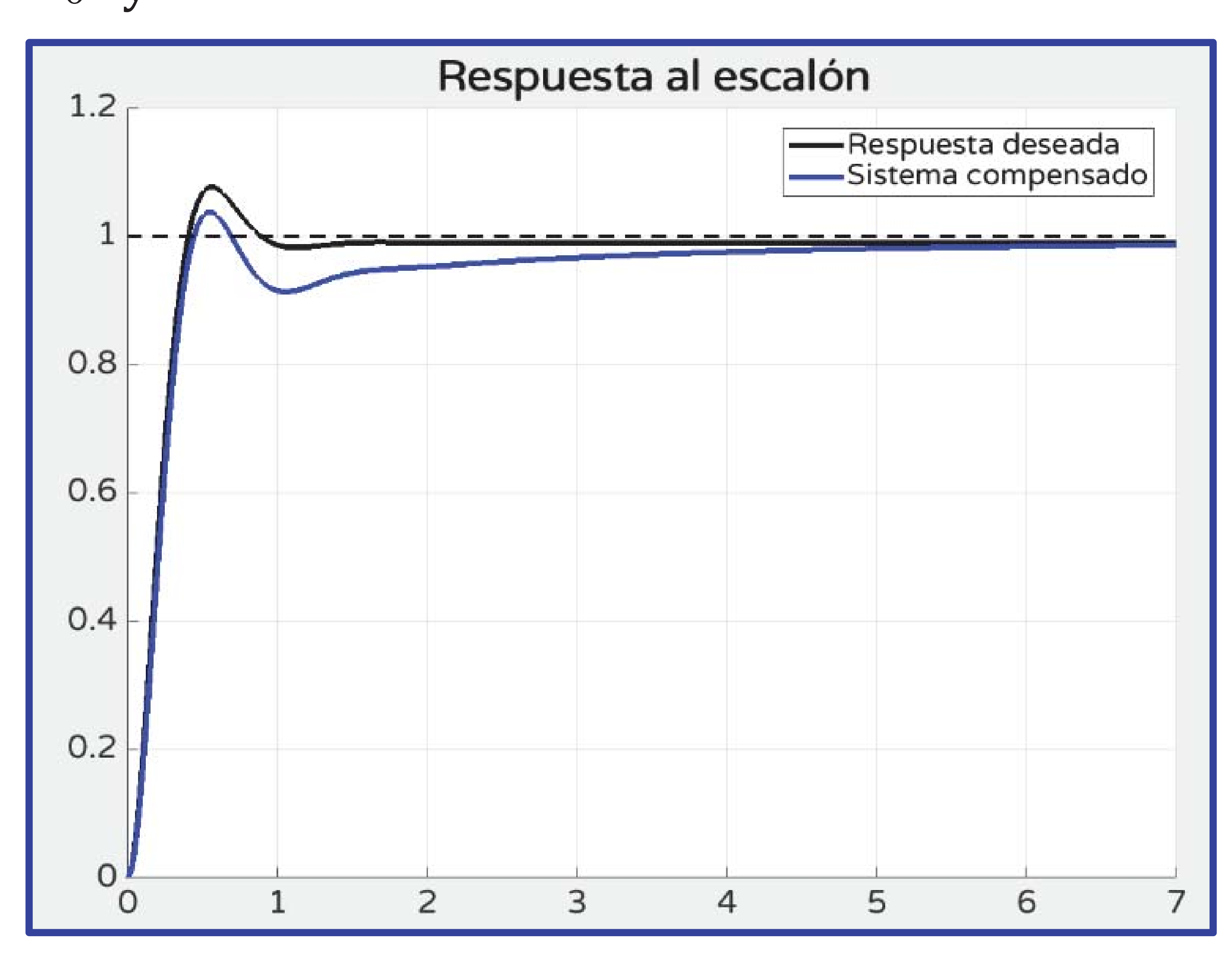
En la figura siguiente se muestran los diagramas de Bode de $G(j\omega)$, $G_c^*(j\omega)$ y $L(j\omega)$



La figura siguiente muestra la respuesta al escalón de $T(s)$.



Observar que se han ajustado los valores de $\Delta = 11^o$ y $z_{lag} = \omega_c^{'}/5 = 1$ a partir de los valores iniciales $\Delta = 6^o$ y $z_{lag} = \omega_c^{'}/10 = 0.5$ hasta obtener la mejor respuesta. Con los valores iniciales la respuesta es muy lenta como se observa en la figura siguiente.



■■■

Red de compensación mixta

Diseño 2: Combinación lead1-lag3

Diseño 2: Combinación lead1-lag3

$$G_c^*(j\omega) = \texttt{lead1}(G(j\omega), \overline{\phi}_L, \omega_c^{'})\texttt{lag3}(G(j\omega), K_n, \omega_c^{'})$$

En este método de diseño una vez fijada la ganancia del controlador para conseguir que el error en régimen permanente sea el deseado, se incrementa el margen de fase con la parte de adelanto de fase y se fija la frecuencia de cruce de ganancia $\omega_c^{'}$ con la parte de retardo.

Especificaciones: K_n, $\overline{\phi}_L$ y $\omega_c^{'}$

Procedimiento de diseño

Parte I- Diseño de la parte de adelanto lead1. (Idéntica a la anterior)

Parte II- Diseño de la parte de atraso lag3. Hay que considerar que para el compensador de atraso de fase que se va a diseñar, el sistema no compensado es $G^{*}_{lead}(s)G(s)$ y que en las frecuencias bajas (en el entorno de $\omega = 0$ es donde se diseña toda red de atraso) $\left|G^{*}_{lead}(0)\right| \approx K^{lead}$ y $\measuredangle G^{*}_{lead}(0) = \measuredangle G_{lead}(0) \approx 0^{o}$.

- **Paso 7)** Se obtiene la ganancia de Bode K^{lag} de **lag3** mediante la definición de K_{n}.

$$K_{n} = \lim_{s\to 0} s^{n} \underbrace{G^{*}_{c}(s)G(s)}_{L(s)} = \underbrace{G^{*}_{c}(0)}_{K=K^{lag}K^{lead}} \underbrace{\lim_{s\to 0} s^{n}G(s)}_{K^{G}_{n}} = K^{lag}K^{led}\,K^{G}_{n}$$

$$\boxed{K^{lag} = \frac{K_{n}}{K^{lead}K^{G}_{n}}}$$

- **Paso 8)** Se calcula α_{lag} para garantizar que la frecuencia de corte deseada ω_c' sea la frecuencia de cruce de ganancia del sistema controlado. Para ello se debe cumplir que:

$$\left|L(j\omega_c')\right| = \left|G_c^*(j\omega_c')G(j\omega_c')\right| = \left|G_c^*(j\omega_c')\right|\left|G(j\omega_c')\right| = 1.$$

$$\left|G_c^*(j\omega_c')\right| = K^{lead}K^{lag}\underbrace{\left|G_{lag}(j\omega_c')\right|}_{\left|G_{lag}(\infty)\right|=1/\alpha_{lag}}\underbrace{\left|G_{lead}(j\omega_c')\right|}_{1/\alpha_{lead}{}^{n/2}} = \frac{K^{lead}K^{lag}}{\alpha_{lag}\alpha_{lead}{}^{n/2}}$$

$$\left|L(j\omega_c')\right| = \underbrace{\left|G_c^*(j\omega_c')\right|}_{\frac{K^{lead}K^{lag}}{\alpha_{lag}\alpha_{lead}{}^{n/2}}}\left|G(j\omega_c')\right| = \frac{K^{lead}K^{lag}}{\alpha_{lag}}\underbrace{\frac{\left|G(j\omega_c')\right|}{\alpha_{lead}{}^{n/2}}}_{1/K^{lead}} = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_{lag} = K^{lag}}$$

Como $\alpha_{lag} = K^{lag}$ resulta el mismo compensador del diseño `lead1-lag1`

- **Paso 9)** Se determinan los valores de z_{lag} y p_{lag} de forma tal que sean menores que p_{lead} y además lo suficientemente alejado de $\omega_c^{'}$ para que la caída de fase que introduce la parte de retardo afecte poco al incremento de fase que añade la parte de adelanto de fase.

Se adopta: $z_{lag} = \omega_c^{'} / 10$, $p_{lag} = z_{lag} / \alpha_{lag}$

Se ha diseñado la parte de atraso de fase:

$$G_{lag}(s) = \frac{(s / z_{lag} + 1)}{(s / p_{lag} + 1)} = \frac{1}{\alpha_{lag}} \frac{(s + z_{lag})}{(s + p_{lag})}$$

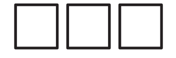
$$G_{lag}^{*}(s) = K^{lag} \; G_{lag}(s) = \underbrace{\frac{K^{lag}}{\alpha_{lag}}}_{1} \frac{(s + z_{lag})}{(s + p_{lag})} = \frac{(s + z_{lag})}{(s + p_{lag})}$$

El compensador de adelanto-atraso completo es:

$$G_c^*(s) = K^{lead} K^{lag} G_{lag}(s) G_{lead}(s) = \frac{K^{lead}}{{\alpha_{lead}}^n} \frac{(s + z_{lag})}{(s + p_{lag})} \frac{(s + z_{lead})^n}{(s + p_{lead})^n}$$

Los diseños lead1-lag1 y lead1-lag3 llevan al mismo compensador lead-lag. Por lo tanto, de ahora en adelante no diferenciaremos los diseños.

Hay una sola red mixta lead-lag.



Red de compensación mixta

Compensador Proporcional-Integral-Derivativo en cascada

(PID Serie)

Compensador Proporcional-Integral-Derivativo en cascada (PID Serie)

Vimos anteriormente que en una red de adelanto fase de una etapa $G_{lead}(s)$ cuando el polo es muy rápido ($p_{lead} \rightarrow \infty$) la red converge a un compensador PD ideal o a uno real según la aproximación que se realice.

$$G_{lead}(s) = \left.\frac{K_{lead}(s + z_{lead})}{(s + p_{lead})}\right|_{p_{lead} \rightarrow \infty}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} G_{\text{PD(ideal)}}(s) = K_p^{\text{PD}} + K_d\, s = K_p^{\text{PD}}\left(1 + T_d\, s\right) \\ G_{\text{PD(real)}}(s) = K_p^{\text{PD}} + \dfrac{K_d\, s}{T_f\, s + 1} = K_p^{\text{PD}}\left(1 + \dfrac{T_d\, s}{T_f\, s + 1}\right) \end{cases}$$

donde $T_d = K_d \,/\, K_p^{\text{PD}}$ es la constante de tiempo derivativa.

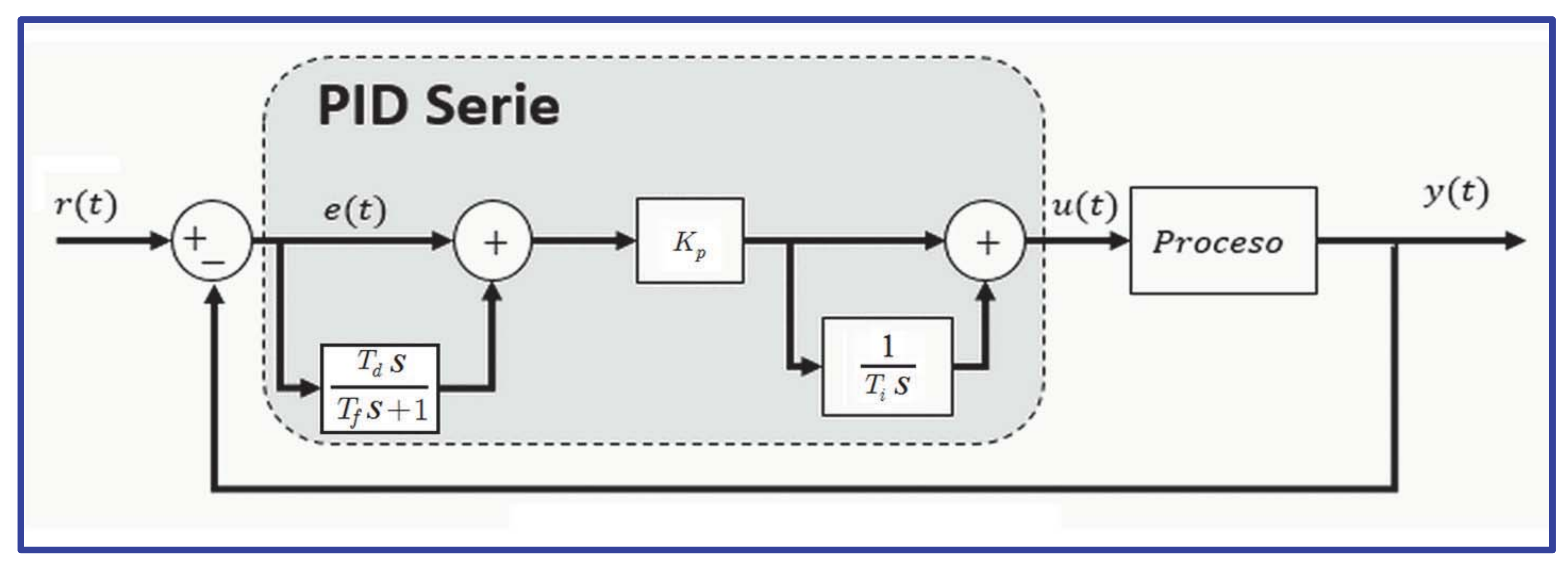
Observación: En muchas referencias a la constante de tiempo T_f se la reemplaza por: $T_f = T_d / N$, donde N es un número entre 2 y 20 (normalmente se adopta N=10). Esto explicita que T_f es mucho más pequeña que T_d.

También vimos que en una red de atraso de fase $G_{lag}(s)$ cuando $\alpha_{lag} = z_{lag} / p_{lag} \to \infty$ se tiene que el polo p_{lag} se va a cero y la red converge a un compensador PI.

$$G_{lag}(s) = \left. \frac{s + z_{lag}}{s + p_{lag}} \right|_{\alpha_{lag} \to \infty} \to G_{\mathrm{PI}}(s) = K_p^{\mathrm{PI}} \frac{(s + K_i / K_p^{\mathrm{PI}})}{s} = K_p^{\mathrm{PI}} \left(1 + \frac{1}{T_i\, s} \right)$$

, con $T_i = K_i / K_p^{\mathrm{PI}}$

La combinación de ambos compensadores en serie o cascada produce el compensador PID serie, luego, los compensadores de adelanto-atraso (lead1-lag1 y lead1-lag1) convergen al PID-serie de la figura siguiente, para $p_{lead} \to \infty$, $n = 1$ y $p_{lag} \to 0$.



PID-serie o en cascada o interactuante o clásico

La función de transferencia es del `PID-serie` es:

$$G_{\mathrm{PID}}^{\mathrm{serie}}(s) = G_{\mathrm{PI}}(s)G_{\mathrm{PD}}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)\left(1 + \frac{T_d\, s}{T_f\, s + 1}\right), \;\; K_p = K_p^{\mathrm{PI}} K_p^{\mathrm{PD}}$$

Operando se llega a:

$$G_{\mathrm{PID}}^{\mathrm{serie}}(s) = K_{\mathrm{PID}}^{\mathrm{serie}} \frac{s^2 + \left(\dfrac{T_f + T_d + T_i}{(T_f + T_d)T_i}\right)s + \left(\dfrac{1}{(T_f + T_d)T_i}\right)}{s\left(s + \dfrac{1}{T_f}\right)} = K_{\mathrm{PID}}^{\mathrm{serie}} \frac{\left(s + \dfrac{1}{T_f + T_d}\right)\left(s + \dfrac{1}{T_i}\right)}{s\left(s + \dfrac{1}{T_f}\right)}$$

con $K_{\mathrm{PID}}^{\mathrm{serie}} = \dfrac{K_p^{\mathrm{PI}} K_p^{\mathrm{PD}}(T_f + T_d)}{T_f}$, $T_d = K_d \,/\, K_p^{\mathrm{PD}}$, $T_i = K_i \,/\, K_p^{\mathrm{PI}}$

Como $T_f << T_d$ se tiene que $T_f + T_d \simeq T_d$ entonces los ceros son siempre reales y estarán ubicados en $-1 \,/\, T_d$ y $-1 \,/\, T_i$.

Diseño de PID-serie

El diseño es similar al de las redes de adelanto-atraso vistas, el diseño de las partes de PD y de PI se realizan de manera completamente independientes. Se diseña primero la parte del PD y se finaliza con la del PI. El compensador $G_{\mathrm{PD}}(j\omega)$ se diseña considerando la planta $G(s)$ y las especificaciones $\overline{\phi}_L$ y $\omega_c^{'}$. Una vez diseñado $G_{\mathrm{PD}}(j\omega)$, se continua diseñando $G_{\mathrm{PI}}(j\omega)$, la parte del PI, para corregir el error permanente e_{ss} o K_n, para el diseño se considera el sistema $L_{\mathrm{PD}}(j\omega) = G_{\mathrm{PD}}(j\omega)G(j\omega)$, no la planta $G(s)$ solamente.

Sistema con el que se diseña: $G(s)$

Especificaciones: K_n, $\overline{\phi}_L$ y $\omega_c^{'}$.

Parte I- Diseño del PD real

$$G_{\mathrm{PD}}(s) = K_p + \frac{K_d\, s}{T_f\, s + 1}$$

A partir de seleccionar T_f se obtienen los parámetros K_p, K_d.

Paso 1) Se asigna T_f

Paso 2) Se calcula $\phi_m = \bar{\phi}_L - \pi - \measuredangle G(j\omega_c^{'}) + \Delta_{\mathrm{PI}}$

Paso 3) Se calcula T_d

$$T_d = \frac{\tan\left(\phi_m + \measuredangle(j\omega_c^{'} + 1 / T_f)\right)}{\omega_c^{'}} - T_f$$

Paso 4) Se calcula K_p

$$K_p = \frac{T_f \left| j\omega_c' + 1/T_f \right|}{(T_f + T_d)\left| j\omega_c' + 1/(T_d + T_f) \right| \left| G(j\omega_c') \right|}$$

Paso 5) Se calcula K_d

$$K_d = K_p T_d$$

Con Matlab:

```
GPD = pid(Kp,0,Kd,Tf)
```

En forma alternativa, a partir de seleccionar T_f se obtienen los parámetros K_{PD}, z_{PD} y p_{PD}.

$$G_{\text{PD}}(s) = K_{\text{PD}} \frac{(s + z_{\text{PD}})}{(s + p_{\text{PD}})}$$

$$p_{\text{PD}} = \frac{1}{T_f}, \quad z_{\text{PD}} = \frac{1}{T_f + T_d}, \quad K_{\text{PD}} = \frac{K_p(T_f + T_d)}{T_f} = \left(\frac{p_{\text{PD}}}{z_{\text{PD}}}\right) K_p$$

Con Matlab:

```
GPD = zpk(-zPD, -pPD, KPD)
```

Parte II- Diseño del PI como lag3 (da lo mismo que lag1)

Paso 6) Como se conoce $\omega_c^{'}$ se calcula directamente z_{PI} : $z_{\text{PI}} = \omega_c^{'}/d$

(d se ajusta entre 2 y 10)

Paso 7) Se calcula la ganancia proporcional K_p

Por ser $\omega_c^{'}$ la frecuencia de cruce se cumple que: $\left|L(j\omega_c^{'})\right| = 1$

Vimos que para un compensador PI para $\omega \to \infty$, $\left|G_{\text{PI}}(j\omega)\right| \to K_p$, luego

$$\left|G_{\text{PI}}(j\omega_c^{'})\right| \approx G_{\text{PI}}(\infty) = K_p$$

$$\left|L(j\omega_c^{'})\right| = \left|G_{\text{PI}}(j\omega_c^{'})G_{\text{PD}}(j\omega_c^{'})G(j\omega_c^{'})\right| = K_p \underbrace{\left|G_{\text{PD}}(j\omega_c^{'})G(j\omega_c^{'})\right|}_{\approx 1} = 1$$

$$K_p = 1$$

El compensador PI es:

$$G_{PI}(s) = \frac{(s + z_{PI})}{s} = \frac{s + \omega_c' / d}{s}$$

Con Matlab:

```
GPI = pid(1,Ki)
```

```
GPI = zpk(-zPI,-pPI,1)
```

$$K_i = z_{PI}$$

Se tiene ya el PID serie:

$$G_{PID}^{serie}(s) = G_{PD}(s)G_{PI}(s) = K_{PD}\frac{(s + z_{PD})(s + z_{PI})}{s(s + p_{PD})}$$

con Matlab `GPID = zpk([-zlag -zpd],[0 -ppd],Kpd)`

Ejemplo (el mismo)

Datos: **La planta Tipo 0:** $$G(s) = \frac{6\,(s+1.5)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Especificaciones:

Error de estado estacionario para una entrada escalón unitario: 0.01

Las especificaciones dinámicas:

Porcentaje de sobreelongación = $\%Os \leq 10\%$

Tiempo de establecimiento: $T_s = 1\,\mathrm{seg}$

Estas especificaciones son equivalentes a $K_0 = 99$, $\bar{\phi}_L \approx 60^{\circ}$ y $\omega_c^{'} = 5\,\mathrm{rad/seg}$

Parte I- Diseño del PD

Paso 1) Se asigna $T_f = 0.033\,\text{seg}$ (el polo del PD es 10 veces más rápido que el más rápido de la planta ubicado en -1/3)

Paso 2) Se calcula $\phi_m = \underbrace{\bar{\phi}_L}_{60^o} - 180^o - \underbrace{\measuredangle G(j\omega_c^{'})}_{-132.62^o} + \underbrace{\Delta_{\text{PI}}}_{6^o} = 18.62^o$

Paso 3) Se calcula $T_d = \dfrac{\tan\left(\phi_m + \measuredangle(j\omega_c^{'} + 1\,/\,T_f)\right)}{\omega_c^{'}} - T_f$

$$T_d = \frac{\text{tand}\left(18.62^o + 18.43^o\right)}{5\,\text{rad/seg}} - 0.033\ \text{seg} = 0.073\,\text{seg}$$

Paso 4) Se calcula $K_p = \dfrac{T_f \left| j\omega_c^{'} + 1 / T_f \right|}{(T_f + T_d) \left| j\omega_c^{'} + 1 / (T_d + T_f) \right| \left| G(j\omega_c^{'}) \right|}$

$$K_p = \frac{0.033 \times 30.41}{0.1067 \times 10.62 \times 0.19} = 4.57$$

Paso 5) Se calcula $K_d = K_p T_d = 0.34\,\text{seg}$

Con Matlab:

$$\text{G}_{\text{PD}} = \texttt{pid}(\underbrace{4.57}_{K_p},0,\underbrace{0.33}_{K_d},\underbrace{0.033}_{T_f}) = 4.57 + 0.33\,\frac{s}{(0.033\,s + 1)}$$

$$= \frac{14.64(s + 9.37)}{(s + 30)}$$

Parte II- Diseño del PI

Paso 6) Como se conoce $\omega_c^{'}$ se calcula directamente:

$$z_{\text{PI}} = \frac{\omega_c^{'}}{d} = \frac{5}{7.5} = 0.67 \quad \text{(ajustando } d \text{ entre 2 y 10)}$$

$$K_i = z_{\text{PI}} = 0.67$$

$$\mathsf{G_{PI}} = \mathsf{pid}(\underbrace{1}_{K_p}, \underbrace{0.67}_{K_i}) = 1 + \frac{0.67}{s} = \frac{(s+0.67)}{s}$$

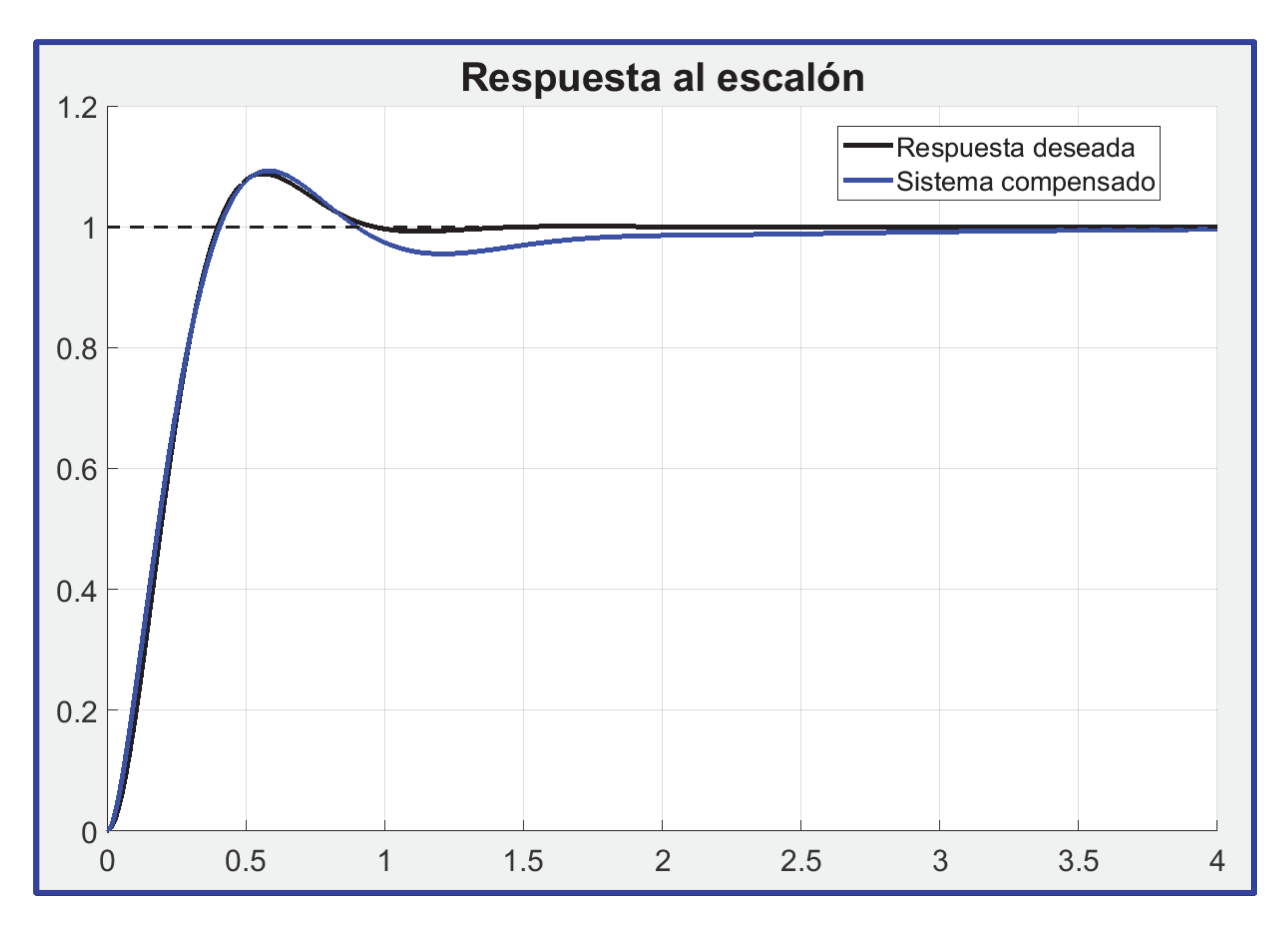
$$\boxed{\mathsf{G_{PID}} = \mathsf{G_{PD}}\mathsf{G_{PI}} = 14.64\frac{(s+0.67)(s+9.37)}{s(s+30)}}$$

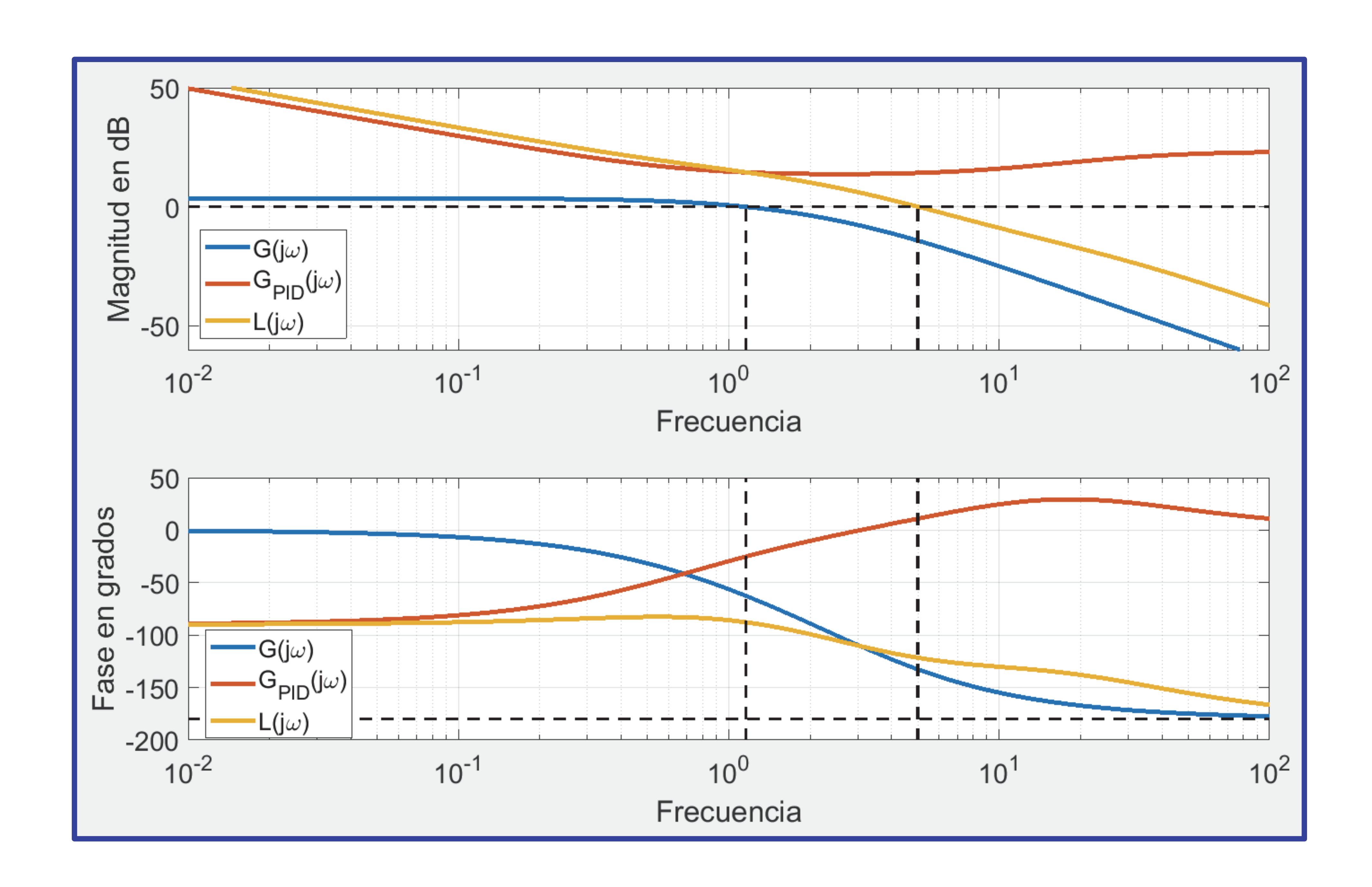
la tabla siguiente muestra los resultados.

```
LAS CARACTERÍSTICAS OBTENIDAS CON EL DISEÑO PID_SERIE SON:
La ganancia K0 especificada es                = 99
La ganancia K0 del sistema compensado es      = Inf
La frecuencia de cruce especificada es        = 5 rad/seg
La frecuencia de cruce de L(s) obtenida es    = 5.03 rad/seg
La sobreelongación de la planta compensada es = 9.2453 %
El margen de fase especificado es             = 60 grados
El margen de fase del sistema compensado es   = 58.296 grados
```

Como $L(j\omega)$ es ahora tipo 1 la ganancia K_0 es infinita y el error permanente para una entrada escalón es nulo. La respuesta dinámica (transitoria) es muy buena, se verifican aproximadamente las especificaciones $\overline{\phi}_L \approx 60^{\mathrm{o}}$y $\omega_c^{'} = 5\,\mathrm{rad/seg}$.

En las figuras siguientes se muestran la respuesta al escalón y los diagramas de Bode.





Magnitud en dB
50
0
-50
G(jω)
G_PID(jω)
L(jω)
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
Frecuencia
Fase en grados
50
0
-50
-100
-150
-200
G(jω)
G_PID(jω)
L(jω)
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
Frecuencia

Comandos útiles de Matlab para el diseño en el dominio de la frecuencia

Comandos útiles de Matlab para el diseño en el dominio de la frecuencia

Esta es una lista no exhaustiva de comandos de Matlab muy útiles en el diseño en frecuencia.

Matlab tiene tres comandos para obtener la respuesta en frecuencia de una función de transferencia: `1)bode, 2)evalfr, 3)freqs.`

No perdamos el tiempo, por varias razones `bode` es el mejor para nuestros propósitos.

```
[magnitud_de_G_en_w, fase_de_G_en_w]=bode(G,w)
```

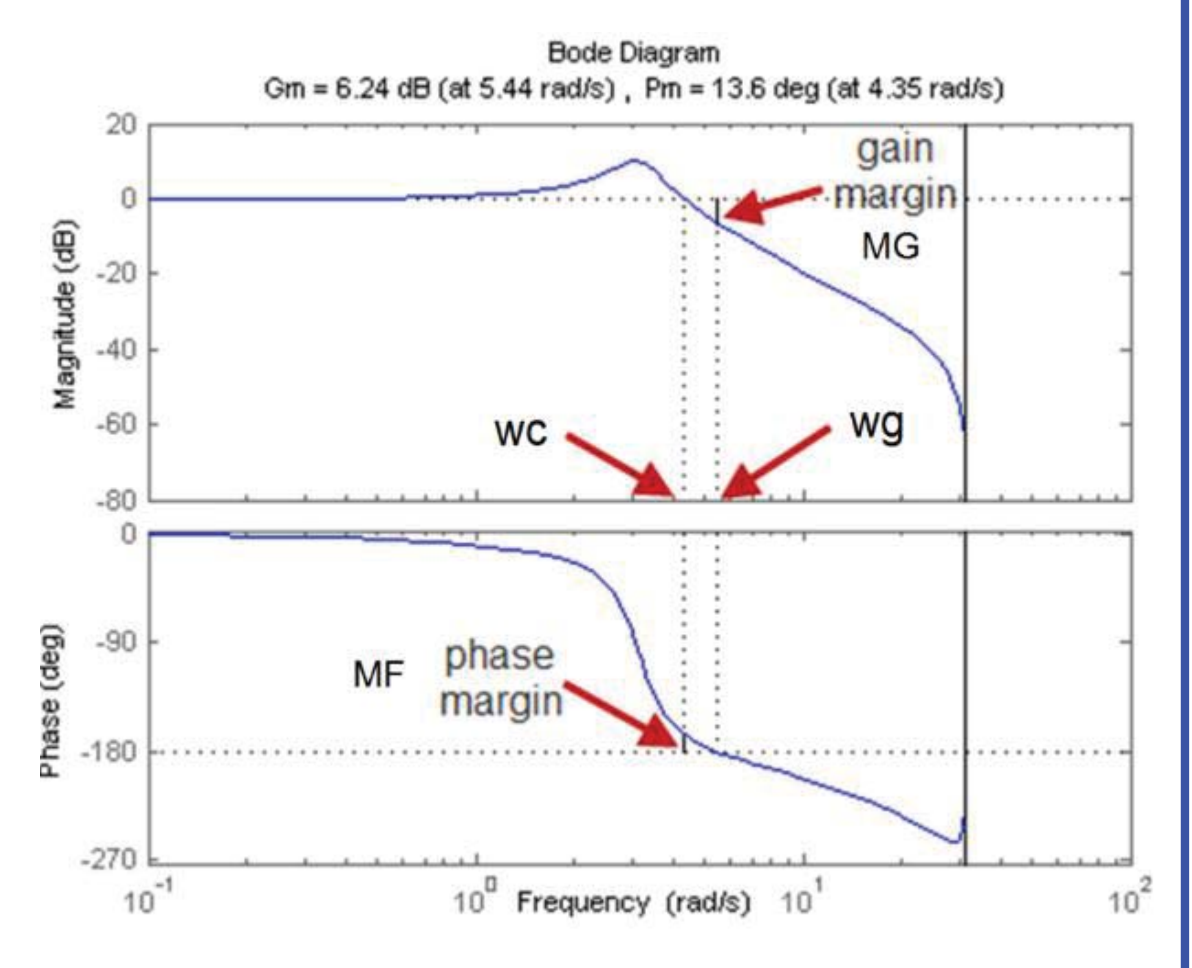
Para graficar los diagramas de Bode:

`bodeplot``(G): grafica el módulo en dB y la fase en grados de G(s).`

`bodemag``(G): grafica el módulo de G(s) en dB.`

Para los márgenes de estabilidad:

margin(G): marca en los diagramas de Bode el margen de ganancia MG, el margen de fase MF, la frecuencia de cruce de ganancia wg y la frecuencia de cruce por 0 dB.



[MG,MF,wg,wc] = **margin**(G): devuelve los valores de MG, MF, wg y wc.

```
margenes = allmargin(G): Devuelve

GainMargin : MG

GMFrequency: wg

PhaseMargin: MF

PMFrequency: wc

DelayMargin: Tmax=Pm/wc (retardo máximo que
soporta el sistema)

     Stable: 1 (1 estable, 0 inestable)
```

Para obtener el ancho de banda wBW de una planta T Tipo 0

```
wBW=bandwidth(T) Para plantas Tipo 1 o
                 superiores da error NaN
                 (Not-a-Number)
```

Para obtener la ganancia de continua o a la frecuencia 0

```
yss=dcgain(T) Las plantas Tipo 1 o superiores
              tienen ganancia de continua
              infinita por los integradores
```

```
Para obtener la información sobre la respuesta
al escalón de T

Step_Info_T=stepinfo(T)  Devuelve:
```

* RiseTime: rise time
* SettlingTime: settling time
* SettlingMin: min value of Y once the response has risen
* SettlingMax: max value of Y once the response has risen
* Overshoot: percentage overshoot (relative to YFINAL)
* Undershoot: percentage undershoot
* Peak: peak absolute value of Y
* PeakTime: time at which this peak is reached.

Funciones trigonométricas en grados

Conocemos las funciones trigonométricas **sin**, **cos**, **tan** y **sec** cuyos argumentos son ángulos en radianes, también conocemos sus inversas **asin**, **acos**, **atan** y **asec** que devuelven sus resultados en radianes. Por otra parte, una fuente común de errores cuando escribimos una script de Matlab es el pasaje de radianes a grados y viceversa. Hay que multiplicar o dividir por pi/180 continuamente para pasar de grados a radianes o viceversa, ayudan en esta tarea los comandos de conversión **rad2deg** y **deg2rad**.

Teniendo en cuenta que el comando más importante del diseño en frecuencia es el comando **bode** el cual devuelve la fase en grados y que además para nosotros es más natural e intuitivo trabajar en grados, lo más conveniente es trabajar siempre en grados. Matlab permite estos con los comandos **sind**, **cosd**, **tand** y **secd** cuyos argumentos son ángulos en grados y sus inversas **asind**, **acosd**, **atand** y **asecd** que devuelven sus resultados en grados.

Ejemplo:

```
x=sin(pi/4) devuelve 0.7071

x=sind(45)  devuelve 0.7071
```

Otros comandos

minreal(G)

Como Matlab no cancela entre si los polos y ceros iguales se utiliza este comando para tal fin.

Ejemplo:

```
>> G=zpk([-1 -3],[0 -1 -5],1)

          (s+1) (s+3)
  G = -------------
        s (s+1) (s+5)


 >> G= minreal(G)

         (s+3)
  G = --------
       s (s+5)
```

FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

tf, **zpk** - crea objetos tipo función de transferencia para manejar con bode(), step(), lsim(), etc.

+,-,*,/ - se puede operar con objetos fdt (ej:G3=G1*G2)

minreal - simplifica una fdt una vez operada (cancela polos-ceros)

dcgain - ganancia a bajas frecuencias de una fdt

RESPUESTA TEMPORAL

step - respuesta al escalón

impulse - respuesta impulsional

lsim - respuesta ante una señal cualquiera dada por un vector de tiempos y un vector de datos

RESPUESTA FRECUENCIAL

bode - diagrama de Bode (magnitud y fase)

bodemag - diagrama de Bode (solo la magnitud)

freqresp - respuesta en frecuencia para valores concretos de w

evalfr - evalúa una fdt en una sola w (compleja)

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

plot - dibuja un vector Y frente a un vector X

grid - permite crear una retícula sobre un gráfico dado

title - permite poner un título en la parte superior del eje (gráfica) actual

subplot - permite crear una matriz de gráficas en una figura

legend - permite crear una leyenda en una gráfica (útil cuando hay varias curvas en la misma gráfica)

OTRAS FUNCIONES ÚTILES

linspace - crea un vector de valores linealmente equiespaciados

(útil para crear vectores de tiempos)

logspace - crea un vector de valores logarítmicamente equiespaciados

(útil para crear vectores de frecuencias)